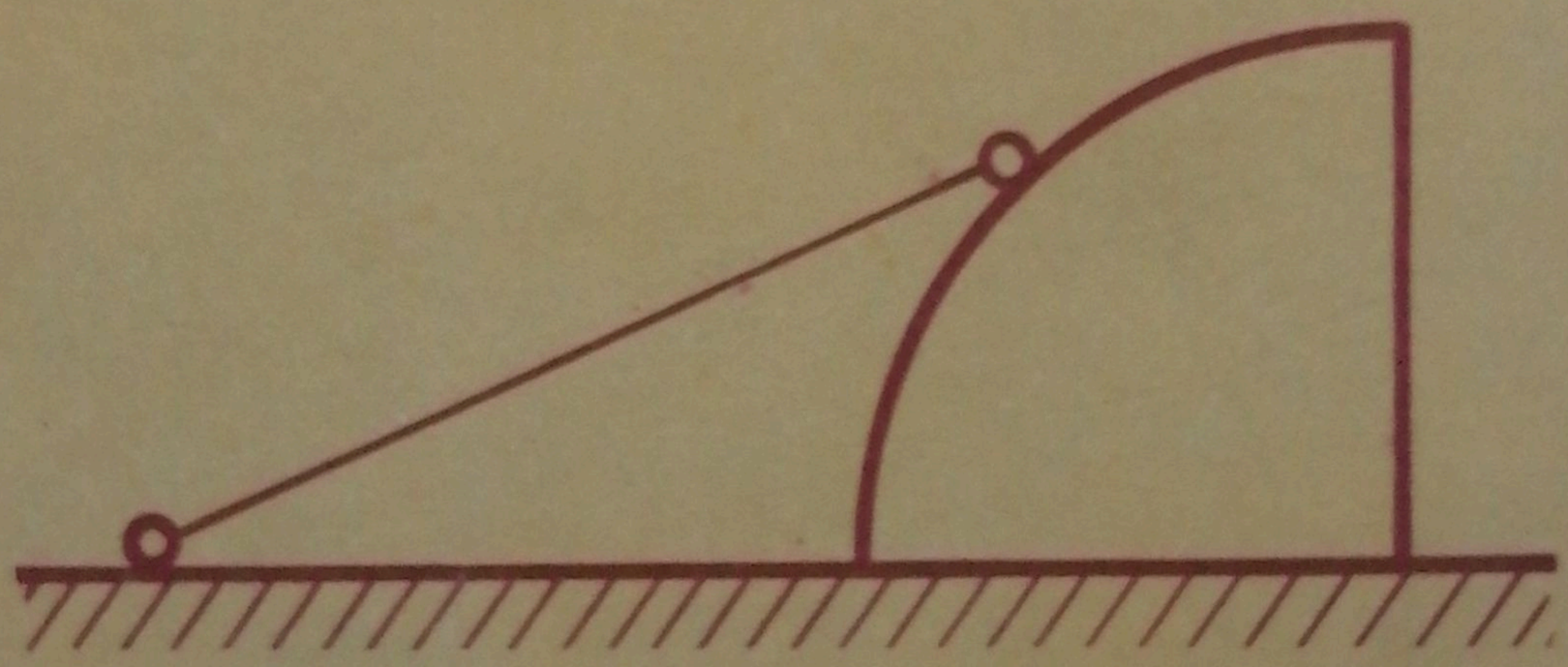
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
FIZICE ȘI CHIMICE
DIN
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

MIHAIL SANDU

CULEGERE DE PROBLEME DE FIZICĂ



VOLUMUL I

BUCUREȘTI 1986

N. Dănilă

MIHAIL SANDU

CULEGERE DE PROBLEME DE FIZICĂ

Volumul I

București 1986

P R E F A T A

Prin conţinutul lor cele 4 x lol probleme abordate în această lucrare dovedesc faptul că ele sînt rezultatul unei activităţi deosebite, desfăşurată de autor atît în cadrul lecţiilor la clasă, cît şi în cadrul cercurilor de fizică ale elevilor.

Prima parte a lucrării cuprinde un număr de lol probleme complet rezolvate. Acest capitol îşi propune să ofere un ghid de rezolvare a problemelor de fizică, constituind în acelaşi timp şi un ghid de redactare a rezolvării unei probleme de fizică.

Autorul nu omite nici o etapă în rezolvarea fiecărei probleme. Aparatul matematic folosit porneşte de la elemente simple ajungînd la elemente de calcul integral şi diferenţial, înglobate în mod armonios pentru înţelegerea semnificaţiilor fizice ale fenomenelor studiate.

Pentru un număr foarte mare de probleme se oferă două şi chiar trei metode de rezolvare, ceea ce contribuie în mod fericit la înţelegerea problemelor tratate.

Cea mai mare parte a problemelor cuprinse în acest capitol sînt originale. O parte din acestea au fost publicate de autor în "Revista de Fizică şi Chimie". Autorul a reţinut în această parte a lucrării şi cîteva probleme propuse la diferite faze ale olimpiadelor de fizică, alăturîndu-le soluţii originale, complete.

Lucrarea se constituie într-un ajutor preţios dat elevilor care vor să-şi însuşească în mod corect tehnica rezolvării problemelor de fizică. In acest sens lucrarea prezintă un interes deosebit.

Autorul apelează foarte des la rezolvări pe bază de reprezentări grafice, lucrarea conţinînd un număr însemnat de astfel de probleme.

Rigurozitatea exprimării, precum şi rigurozitatea calculelor şi a interpretărilor fizice făcute, dau lucrării un caracter ştiinţific, unitar.

Se propun în acest capitol probleme experimentale, lega-

te de realitatea înconjurătoare, probleme care marchează legătura fizicii cu alte discipline: matematica, geografia, biologia, chimia, astronomia etc.

Gradul de dificultate al problemelor propuse în acest capitol este în general ridicat. Prin aceasta autorul se adresează elevilor cu înclinaţii deosebite spre studiul fizicii.

In lucrare sînt prezentate cîteva probleme, care prin modul deosebit de abordare în rezolvare, depăşesc ceea ce în mod obişnuit înseamnează rezolvarea unei probleme, constituindu-se într-un mod original de tratare superioară a unor noţiuni şi fenomene complexe.

Cîteva din legile cu care în mod frecvent operăm în rezolvarea problemelor de fizică sînt prezentate şi aplicate corect, riguros, asigurînd înţelegerea acestora.

In partea a doua a lucrării autorul propune spre rezolvare un număr de lol probleme, în majoritate originale.

Pentru aceste probleme autorul prezintă numai rezultatul final, oferind astfel posibilitatea celui care rezolvă problema să-şi confrunte rezultatul găsit cu cel propus de autor.

Aceste probleme au în majoritate un grad de dificultate sporit.

O mare parte din problemele acestui capitol au un corespondent în prima parte a lucrării.

Partea a treia a lucrării constituie un element de noutate în literatura de specialitate de acest gen din ţara noastră, prezentînd un număr de lol probleme - test.

Pentru aceste probleme - test autorul propune diferite variante de răspuns, printre care se află şi răspunsul corect. Cel ce rezolvă problema trebuie să identifice răspunsul corect pe bază de demonstraţie. La sfîrşitul capitolului se precizează variantele de răspuns corecte.

In partea a patra a lucrării autorul formulează un număr de lol probleme - întrebări.

Problemele propuse de autor în această lucrare vor ajuta în mod substanţial elevii să se familiarizeze şi să se convingă de caracterul practic - aplicativ al relaţiilor şi teoremelor întîlnite în manualele şcolare, dîndu-li-se astfel posibilita-

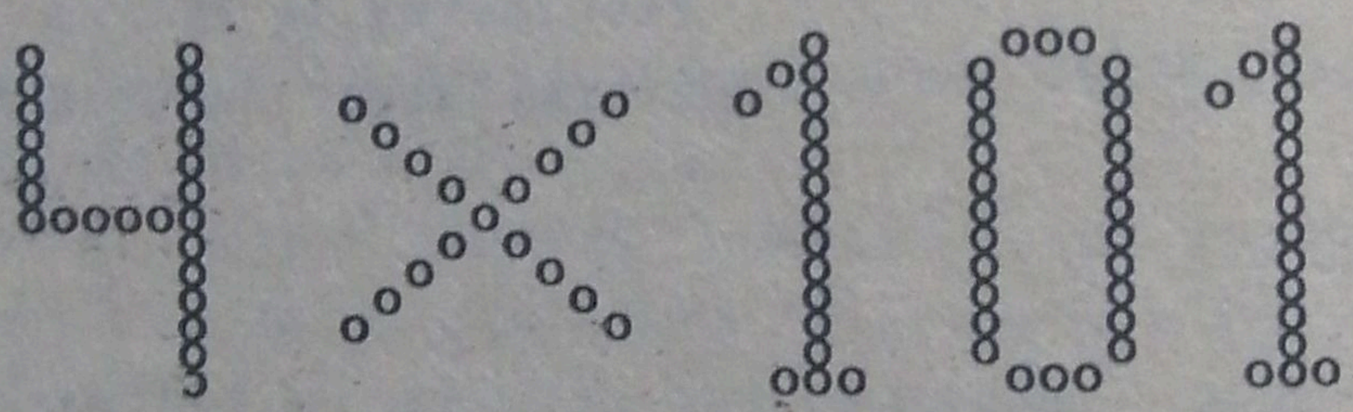
tea de a se convinge singuri de legătura strînsă ce există între conţinutul fizicii şi diverse ramuri ale tehnicii contemporane.

Lucrarea va constitui un preţios ajutor pentru toţi profesorii care predau fizica în liceu, cu atît mai mult cu cît ea conţine şi teme experimentale, probleme - întrebări şi probleme recapitulative bine gîndite, bine formulate şi de o necontestată eficienţă didactică.

Prin publicarea lucrării se pune la dispoziţia şcolii o carte pe baza căreia se va stimula interesul elevilor pentru studiul fenomenelor fizice întîlnite, se va dezvolta puterea lor de a face legătura cunoştinţelor teoretice cu practica.

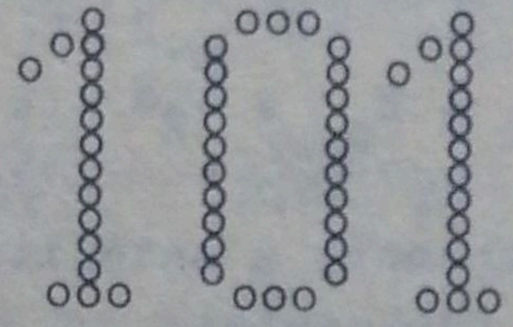
Consider că lucrarea va fi apreciată în mod deosebit de elevii de liceu, cărora le va fi de ajutor atît în cadrul cercurilor de fizică, cît şi în cadrul studiului individual, în vederea participării la olimpiadele şcolare şi la concursurile de admitere în treapta a II-a de liceu şi în învăţămîntul superior.

Prof. Dr. Docent VASILE P. MIHU
Facultatea de Fizică
Universitatea Bucureşti



PROBLEME PENTRU

CERCURILE DE FIZICA



P R O B L E M E

R E Z O L V A T E

Problema 1

De pe suprafaţa Pămîntului, dintr-un punct cu latitudinea geografică cunoscută, se lansează, cu ajutorul unei rachete, un satelit cu masa m pentru a fi plasat pe o orbită circumterestră la altitudinea h.

1) Să se calculeze energia necesară plasării pe orbită. Pentru ce puncte de pe suprafaţa Pămîntului energia necesară acestei plasări este minimă?

2) Datorită frecărilor cu aerul rarefiat din păturile superioare ale atmosferei, altitudinea satelitului începe să scadă, astfel că energia sa totală scade în timp conform relaţiei:

$$E = E_o(1 + at), \text{ în care } o < a < 1.$$

Cum variază în timp altitudinea şi viteza satelitului?

Rezolvare

1)

Energia satelitului pe sol înainte de lansare

$$E_o = E_{co} + E_{po} = \frac{mv_o^2}{2} - k\frac{mM}{R};$$

v_o = viteza de antrenare a satelitului datorită mişcării de rotaţie a Rămîntului;

$$v_o = \omega R \cos\theta;$$

ω = viteza unghiulară a Pămîntului;

θ = latitudinea punctului de lansare;

$$E_o = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \cos^2\theta - \frac{kmM}{R}.$$

Energia satelitului pe traiectorie

$$E_h = E_{ch} + E_{ph} = \frac{mv^2}{2} - \frac{kmM}{R + h}.$$

Deoarece:

$$\frac{mv^2}{R + h} = \frac{kmM}{(R + h)^2},$$

rezultă: $$\frac{mv^2}{2} = \frac{kmM}{2(R + h)} ;$$

$$E_h = - \frac{kmM}{2(R + h)} .$$

Energia necesară plasării pe orbită

$$E = E_h - E_o;$$

$$E = \frac{kmM(R + 2h)}{2R(R + h)} - \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \cos^2\theta .$$

2)

Energia necesară plasării pe orbită este minimă atunci cînd factorul care se scade este maxim, adică atunci cînd $\cos\theta = 1$, deci pentru $\theta = o$ (puncte de pe ecuator).

$$E = E_o(1 + at);$$

$$E_o = - \frac{kmM}{2r_o} = - \frac{kmM}{2(R + h_o)};$$

$$E = - \frac{kmM}{2r} = - \frac{kmM}{2(R + h)};$$

$$h = \frac{R + h_o}{1 + at} - R;$$

$$\frac{mv_o^2}{r_o} = \frac{kmM}{r_o^2}; \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{kmM}{r^2}; \quad \frac{v^2}{v_o^2} = \frac{r_o}{r};$$

$$\frac{r_o}{r} = \frac{E}{E_o} = 1 + at;$$

$$v = v_o \sqrt{1 + at}.$$

Problema 2

Dintr-un punct A situat pe plaja mării un om își vede prietenul în largul mării în punctul oarecare B, aflat în pericol. Știind că pe plajă omul poate alerga cu viteza v_1, iar în apă poate înota cu viteza v_2 să se precizeze drumul pe care trebuie să-l urmeze omul de pe mal pentru a-și salva prietenul.

Rezolvare

Drumul cel mai indicat este desigur acela care necesită timpul cel mai scurt.

Conform desenului reprezentat în figura I.1, plecînd de pe mal din punctul A poate fi ales unul din următoarele trasee: AA_1B; AA_1B_1B; AB_1B; AB; AIB.

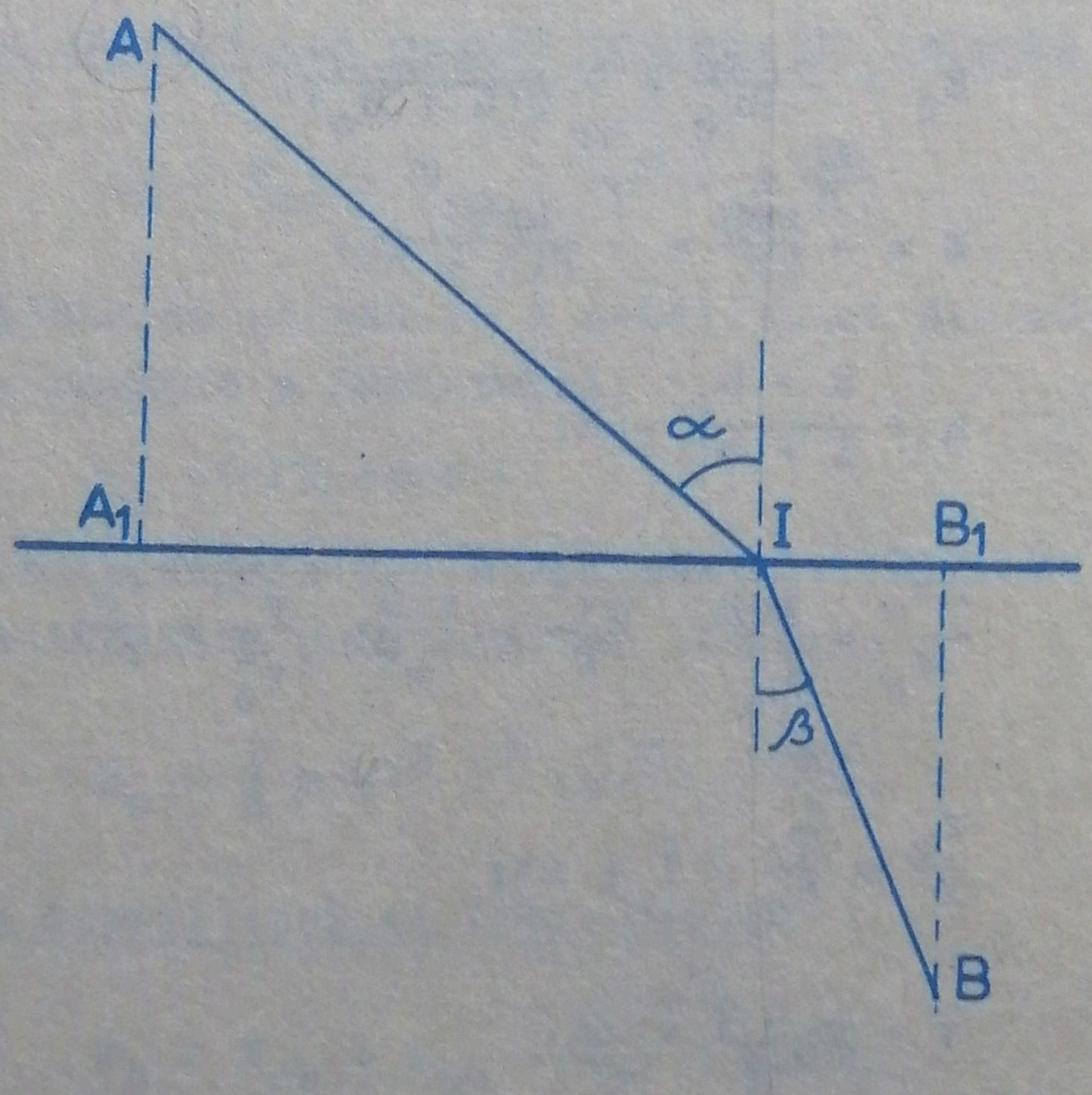


Figura I.1

Notații:

$AA_1 = a$; $BB_1 = b$; $A_1B_1 = d$; $A_1I = x$.

A alege soluţia cea mai bună însemnează a găsi poziţia punctului I pe dreapta A_1B_1 în aşa fel încît timpul necesar parcurgerii drumului dintre A şi B să fie minim.

Mişcările fiind uniforme rezultă:

$$t = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2};$$

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

Poziţia punctului I este precizată de valoarea lui x pentru care t este minim. De aceea vom calcula prima derivată a lui t în raport cu x, pe care apoi anulînd-o rezultă:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d - x}{v_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}. \qquad (1)$$

Din triunghiurile AIA_1 şi BIB_1 se pot scrie relaţiile:

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}};$$

$$\sin\beta = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

Cu aceste rezultate ecuaţia (1) devine:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = v_1/v_2. \qquad (2)$$

Relaţia (2) constituie legea refracţiei drumului parcurs de un mobil între două puncte situate în medii diferite, în aşa fel încît durata mişcării să fie minimă.

In concluzie, putem afirma că nu trebuie ales traseul în linie dreaptă de la A la B, ci acela care necesită durata minimă, adică traseul pentru care este îndeplinită relaţia (27.

Problema 3

Viteza apei unui rîu cu lăţimea L creşte liniar de la valoarea v_o la maluri, pînă la valoarea v la mijlocul rîului. O barcă cu motor traversează rîul înaintînd cu viteza v_2 faţă de apă, perpendicular pe cursul apei. Să se determine:

1) ecuaţia traiectoriei bărcii în raport cu malurile;
2) ecuaţia traiectoriei bărcii în raport cu apa;
3) în ce punct soseşte barca pe malul celălalt.

Caz particular: $v = v_o$.

Rezolvare

In desenul din figura I.2 am ales un sistem de axe de coordonate ox şi oy solidare cu malurile rîului.

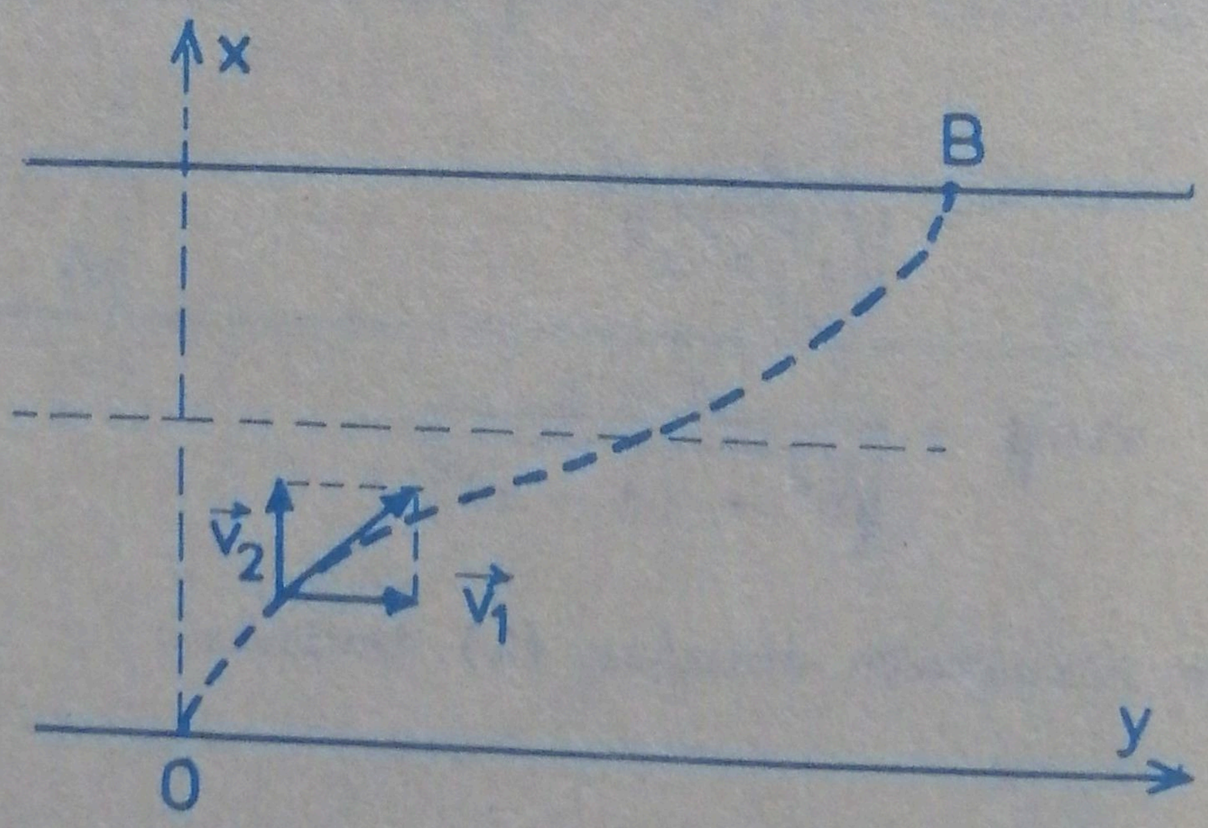


Figura I.2

Deoarece viteza apei rîului creşte liniar de la maluri spre mijlocul rîului, ecuaţia ei este de forma:

$$v_1 = v_o + bx,$$

unde b este o constantă a cărei valoare se determină din condiţiile impuse de problemă.

Dacă $x = L/2$, atunci $v_1 = v$. Rezultă:

$$b = \frac{2(v - v_o)}{L};$$

$v_1 = v_o + 2\frac{v - v_o}{L}x$ = viteza apei faţă de sol;

v_2 = constant = viteza bărcii faţă de apă.

Coordonata de poziţie a bărcii în raport cu axa ox este:

$$x = v_2 t.$$

Viteza bărcii în lungul axei oy este egală cu viteza apei şi poate fi scrisă ca derivata întîi a spaţiului (coordonata y) în raport cu timpul:

$$v_1 = \frac{dy}{dt},$$

de unde rezultă:

$$y = \int v_1 dt = \int (v_o + 2\frac{v - v_o}{L}x)dt;$$

$$y = v_o t + 2\frac{v - v_o}{L}\int x\,dt.$$

Inlocuind expresia lui x şi efectuînd integrarea, rezultă:

$$y = v_o t + \frac{(v - v_o)v_2 t^2}{L};$$

$$x = v_2 t.$$

Aceste două ultime expresii constituie ecuaţiile parametrice ale traiectoriei bărcii în raport cu malurile. Eliminînd parametrul t între cele două ecuaţii, obţinem forma analitică a ecuaţiei traiectoriei:

$$y = \frac{v_o}{v_2} x + \frac{v - v_o}{v_2 L} x^2.$$

Traiectoria bărcii în raport cu malurile este deci o parabolă. Se observă că în lungul axei ox mişcarea bărcii este uniformă, iar în lungul axei oy mişcarea este uniform accelerată cu acceleraţia:

$$a = \frac{2(v - v_o)v_2}{L}.$$

2) Fie x'o'y' un sistem de referinţă solidar cu apa rîului de la maluri, avînd: o'x'//ox şi o'y'//oy. Sistemul x'o'y' este în mişcare uniformă cu viteza v_o faţă de sistemul xoy. In orice moment $x' = x = v_2 t$. In sistemul x'o'y' componentele vitezei bărcii sînt:

$$v_{x'} = v_2 = \text{constant};$$

$$\vec{v}_{y'} = \vec{v}_1 - \vec{v}_o;$$

$$v_{y'} = v_1 - v_o = 2 \frac{v - v_o}{L} x;$$

$$v_{y'} = \frac{dy'}{dt}.$$

Rezultă:

$$y' = 2 \frac{v - v_o}{L} \int x \, dt = \frac{(v - v_o)v_2}{L} t^2;$$

$$x' = v_2 t;$$

$$y' = \frac{(v - v_o)}{v_2 L} x'^2.$$

Concluzie: în raport cu apa din apropierea malurilor, traiectoria bărcii este tot o parabolă.

Dacă se studiază mişcarea bărcii în raport cu un sistem de referinţă x"o"y" solidar cu apa de la mijlocul rîului, deci un sistem de referinţă în mişcare uniformă cu viteza v faţă de sistemul xoy, rezultă:

$$x'' = x = v_2 t;$$

$$v_{x''} = v_2 = \text{constant};$$

$$\vec{v}_{y''} = \vec{v}_1 - \vec{v};\ v \quad v_1;\ v_{y''} = v - v_1;$$

$$v_{y''} = (v - v_o)(1 - \frac{2x}{L}) = \frac{dy''}{dt};$$

$$y'' = (v - v_o)t - \frac{(v - v_o)v_2}{L} t^2;$$

$$x'' = v_2 t.$$

Si în raport cu sistemul de referinţă x"o"y" traiectoria bărcii este o parabolă. In lungul axei o"y" mişcarea bărcii este uniform încetinită cu acceleraţia:

$$a'' = - \frac{2(v - v_o)v_2}{L}.$$

3) Timpul necesar bărcii ca să ajungă pînă la mijlocul rîului se calculează din ecuaţia lui x, punînd condiţia: $x = L/2$. Rezultă:

$$t = L/2v_2.$$

Timpul necesar traversării rîului este:

$$T = 2t = L/v_2.$$

A găsi punctul în care a ajuns barca pe malul opus, înseamnă a găsi valoarea lui y pentru $t = T$. Rezultă:

$$Y = L(v + v_o)/2v_2.$$

Dacă $v = v_o$, traiectoria bărcii în raport cu malurile este o dreaptă cu ecuaţia: $y = v_o x/v_2$.

Problema 4

O parte din lungimea L a unui lanţ omogen, cu masa m, se reazemă cu frecare pe un plan orizontal, iar cealaltă parte atîrnă pe verticală. Cunoscînd coeficientul de frecare μ să se calculeze:

1) lungimea porţiunii care atîrnă, pentru care lanţul începe să se mişte;

2) viteza lanţului în funcţie de lungimea porţiunii de pe verticală;

3) viteza maximă a lanţului.

Rezolvare

1) Lanţul va începe să se mişte atunci cînd greutatea porţiunii de pe verticală va depăşi forţa de frecare care acţionează asupra porţiunii de pe planul orizontal:

$$G_v > F_{fo};$$

$$G_v > \mu G_o;\ m_v > \mu m_o;$$

$$L_v > \mu L_o;\ L_v > \mu (L - L_v);$$

$$L_v > \frac{\mu L}{1 + \mu}.$$

2) Fie z lungimea porţiunii de pe verticală în momentul în care viteza lanţului este v.

Considerînd că la momentul iniţial, cînd lungimea porţiunii de pe verticală este $L_v = \mu L/(1+\mu)$, lanţul este în repaus, din teorema variaţiei energiei cinetice rezultă:

$$\Delta E_c = L_{\vec{R}};$$

$$\frac{mv^2}{2} - o = \int_{L_v}^{z} R\, dz,$$

în care R este modulul rezultantei forţelor externe care acţionează asupra lanţului:

$$R = g \frac{m}{L}\{(1 + \mu)z - \mu L\}.$$

Rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{g(z - L_v)}{L}\{(1 + \mu)(z + L_v) - 2\mu L\}}.$$

3) Viteza maximă a lanţului se obţine din expresia anterioară pentru z = L.

Problema 5

Un om cu înălţimea h aleargă pe un drum orizontal cu acceleraţia $\vec{a}_1$ faţă de sol. Deasupra sa, la înălţimea H, un bec aprins se deplasează cu suportul său în sens contrar cu acceleraţia $\vec{a}_2$ faţă de sol. In momentul trecerii pe sub bec vitezele lor în raport cu solul sînt $\vec{v}_{o1}$ şi respectiv $\vec{v}_{o2}$.

1) Să se calculeze timpul t, socotit din acest moment, pînă cînd umbra de pe sol a omului va avea lungimea egală cu dublul înălţimii omului.

2) Dacă la momentul t se desprinde suportul cu becul aprins, cît este de lungă umbra de pe sol la momentul $t + t_1$?

3) După cît timp de la desprinderea suportului becului umbra ajunge la infinit?

4) Care este înălţimea umbrei, dacă în momentul în care becul atinge solul, omul se afla la distanţa d în faţa unui perete vertical?

Rezolvare

In desenul din figura I.3 am notat AB poziţia iniţială a omului, iar C este poziţia iniţială a becului.

Notaţii: AB = h; AC = H; $A_1A_2 = 2h$;

$$AA_1 = s_1 = v_{o1}t + a_1t^2/2;$$
$$CC_1 = s_2 = v_{o2}t + a_2t^2/2.$$

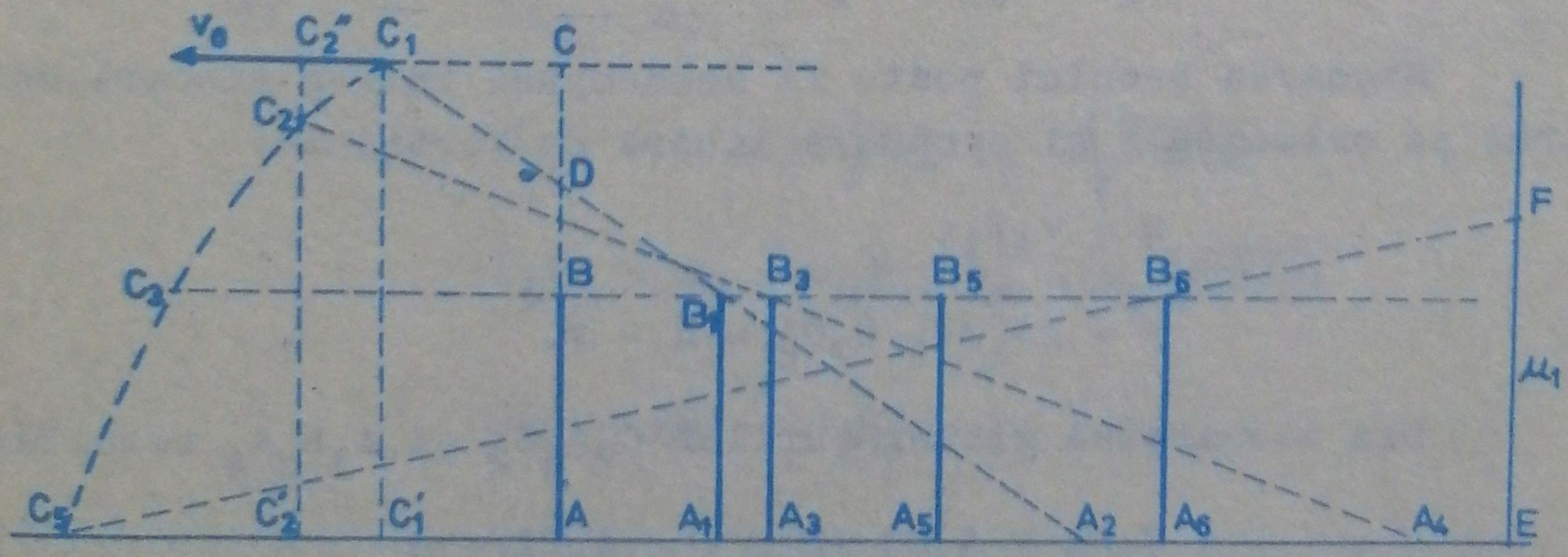


Figura I.3

Din asemănarea triunghiurilor $A_1B_1A_2$ şi BDB_1 rezultă:

$$\frac{A_1B_1}{BD} = \frac{A_1A_2}{BB_1};\ \frac{h}{BD} = \frac{2h}{s_1};\ BD = s_1/2.$$

Din asemănarea triunghiurilor BDB_1 şi CDC_1 rezultă:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BB_1}{CC_1};\ \frac{s_1}{2CD} = \frac{s_1}{s_2};\ CD = s_2/2.$$

$$CD = AC - AB - BD = H - h - s_1/2;$$

$$s_2/2 = H - h - s_1/2;\ s_1 + s_2 = 2(H - h);$$

$$v_{o1}t + a_1t^2/2 + v_{o2}t + a_2t^2/2 = 2(H - h);$$

$$(a_1+a_2)t^2 + 2(v_{o1}+v_{o2})t - 4(H-h) = o;$$

$$t = \frac{\sqrt{(v_{o1}+v_{o2})^2 + 4(a_1+a_2)(H - h)} - (v_{o1}+v_{o2})}{a_1 + a_2}.$$

2) Din momentul desprinderii suportului mişcarea beculuiui este o aruncare pe orizontală în cîmpul gravitaţional terestru, cu viteza iniţială:

$$v_o = v_2 = v_{o2} + a_2t.$$

Viteza omului în momentul desprinderii suportului este:

$$v_1 = v_{o1} + a_1t.$$

Mişcarea beculuiui poate fi descompusă într-o mişcare uniformă pe orizontală şi o cădere liberă pe verticală:

$$x = v_2t_1;$$

$$y = gt_1^2/2;\ C_2C_2' = H - y.$$

Din asemănarea triunghiurilor $C_2A_4C_2'$ şi $A_3B_3A_4$ rezultă:

$$\frac{C_2C_2'}{A_3B_3} = \frac{A_4C_2'}{A_3A_4};\ \frac{H - y}{h} = \frac{A_3C_2' + u}{u};$$

$$\frac{H - y}{h} = \frac{AC_2' + AA_3 + u}{u};$$

$$\frac{H - y}{h} = \frac{C_1C_2'' + CC_1 + AA_3 + u}{u};$$

$$\frac{H - y}{h} = \frac{x + s_2 + s_1' + u}{u};$$

$$\frac{H - y}{h} = \frac{x + s_2 + s_1'}{u} + 1;$$

$$u(H - h - y) = (x + s_2 + s_1')h;$$

$$u = \frac{(v_{o2}+a_2t)t_1+v_{o2}t+\frac{a_2t^2}{2}+v_{o1}(t+t_1)+\frac{a_1(t+t_1)^2}{2}}{H - h - \frac{gt_1^2}{2}}h.$$

3) Umbra va ajunge la infinit atunci cînd becul se află deasupra solului la o înălţime egală cu înălţimea omului, deci atunci cînd becul a parcurs pe verticală distanţa H-h.

Rezultă:

$$C_4C_2'' = y_2 = gt_2^2/2 = H - h;$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2H - 2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(H - h)}{g}}.$$

4) $EA_6 = d;$

$$C_1C_1' = H = gt_3^2/2;\ t_3 = \sqrt{2H/g};$$

$$C_5C_1' = x_3 = v_2t_3;\ x_3 = v_2\sqrt{2H/g};$$

$$AC_5 = AC_1' + C_5C_1' = x_3 + s_2;$$

$$AC_5 = v_2\sqrt{2H/g} + v_{o2}t + a_2t^2/2;$$

$$AA_6 = s_1'' = v_{o1}(t + t_3) + \frac{a_1(t + t_3)^2}{2}.$$

Din asemănarea triunghiurilor $A_6B_6C_5$ şi EC_5F rezultă:

$$\frac{A_6C_5}{EC_5} = \frac{A_6B_6}{u_1};$$

$$\frac{AC_5 + AA_6}{AC_5 + AA_6 + d} = h/u_1;$$

$$\frac{x_3 + s_2 + s_1''}{x_3 + s_2 + s_1'' + d} = h/u_1;$$

$$u_1 = h + \frac{hd}{x_3 + s_2 + s_1''}.$$

Problema 6

Două trenuri se deplasează uniform accelerat în sensuri opuse pe traiectorii circulare concentrice cu raze cunoscute. Fiecare mecanic cronometrează timpul cît celălalt tren trece prin faţa sa. Cunoscînd acceleraţiile tangenţiale ale celor două trenuri (a_1 şi a_2) şi vitezele în momentul întîlnirii celor două trenuri (v_1 şi v_2) să se calculeze:

1) lungimile celor două trenuri;

2) după cît timp de la întîlnire cele două trenuri se vor depăşi complet.

Caz particular: $a_1 = a_2 = o$; $R_1 = R_2$.

Rezolvare

Notaţiile desenului din figura I.4 au următoarele semnificaţii:

$A_1B_1 = L_1$ = lungimea primului tren;

$A_2B_2 = L_2$ = lungimea trenului al doilea;

R_1; R_2 = razele celor două cercuri;

OA_1A_2 = linia de întîlnire a locomotivelor;

$OA_1'B_2'$ = linia pe care locomotiva trenului 1 trece pe lîngă ultimul vagon al trenului 2;

$OB_1'A_2'$ = linia pe care locomotiva trenului 2 trece pe lîngă ultimul vagon al trenului 1.

Dacă t_1 este timpul cît durează trecerea trenului 1 prin faţa mecanicului trenului 2, rezultă:

$$A_1B_1 = A_1B_1' + B_1B_1'; \qquad (1)$$

$$A_1B_1' = \alpha_1 R_1;\ A_2A_2' = \alpha_1 R_2;\ A_1B_1' = \frac{R_1}{R_2} A_2A_2';$$

$$B_1B_1' = v_1 t_1 + a_1 t_1^2/2;$$

$$A_2A_2' = v_2 t_1 + a_2 t_1^2/2;$$

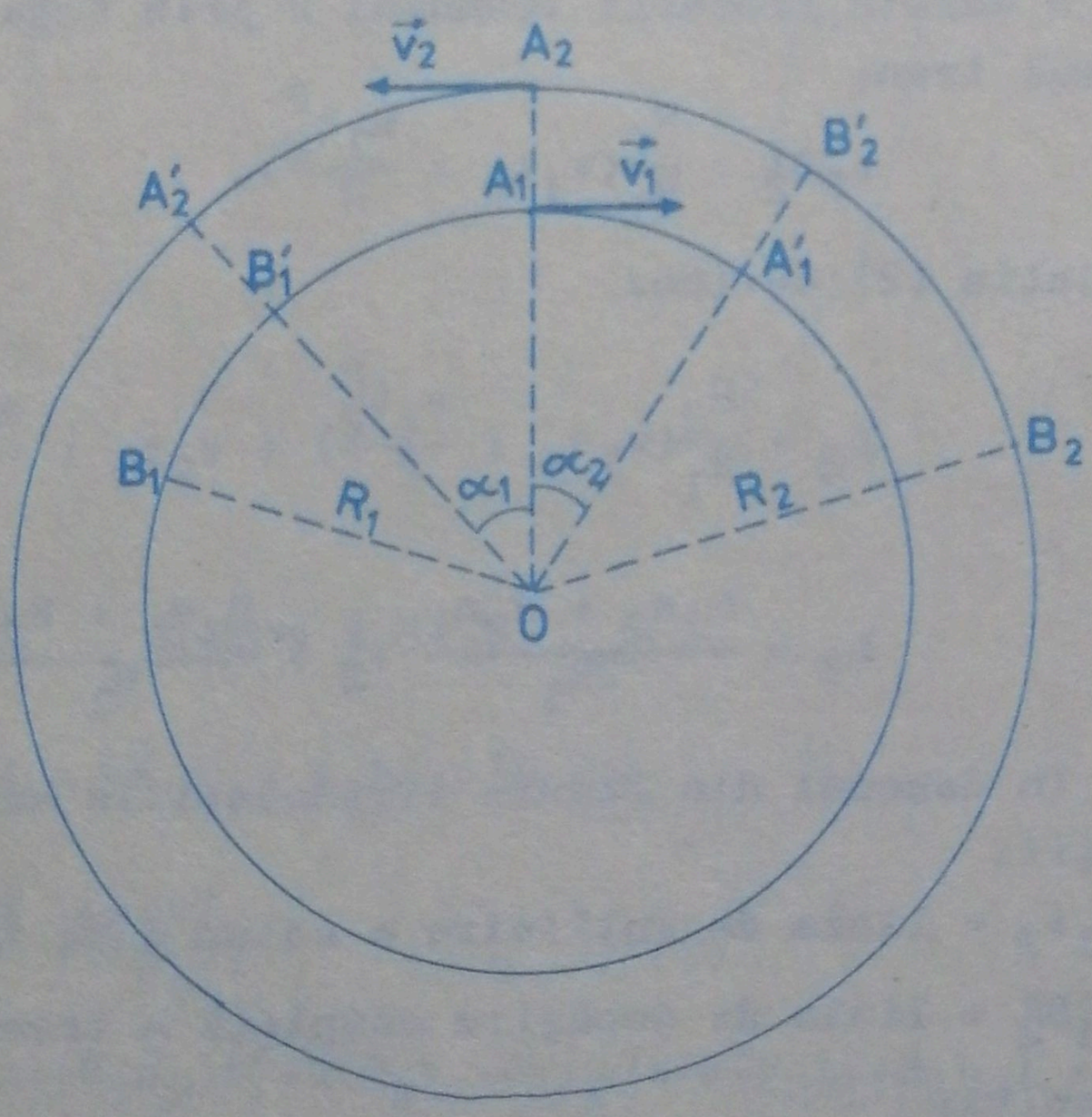


Figura I.4

$$A_1B_1' = \frac{R_1}{R_2}(v_2t_1 + \frac{a_2t_1^2}{2}).$$

Relaţia (1) devine:

$$L_1 = \frac{R_1}{R_2}(v_2t_1 + \frac{a_2t_1^2}{2}) + v_1t_1 + \frac{a_1t_1^2}{2};$$

$$L_1 = \frac{R_1a_2 + R_2a_1}{2R_2}\,t_1^2 + \frac{R_1v_2 + R_2v_1}{R_2}\,t_1.$$

$$A_2B_2 = A_2B_2' + B_2B_2'; \qquad (2)$$

$$A_1A_1' = \propto_2 R_1;\ A_2B_2' = \propto_2 R_2;\ A_2B_2' = \frac{R_2}{R_1}A_1A_1';$$

$$A_1A_1' = v_1t_2 + \frac{a_1t_2^2}{2};$$

$$B_2B_2' = v_2t_2 + \frac{a_2t_2^2}{2};$$

t_2 = durata trecerii trenului 2 prin faţa mecanicului de pe primul tren;

$$A_2B_2' = \frac{R_2}{R_1}(v_1t_2 + \frac{a_1t_2^2}{2}).$$

Relaţia (2) devine:

$$L_2 = \frac{R_2}{R_1}(v_1t_2 + \frac{a_1t_2^2}{2}) + v_2t_2 + \frac{a_2t_2^2}{2};$$

$$L_2 = \frac{R_1a_2 + R_2a_1}{2R_1}\,t_2^2 + \frac{R_1v_2 + R_2v_1}{R_1}\,t_2.$$

2) In desenul din figura I.5 notaţiile au următoarele semnificaţii:

OA_1A_2 = linia de întîlnire a celor două trenuri;

$OB_1'B_2'$ = linia de depăşire completă a trenurilor.

Rezultă:

$$A_1B_1' = A_1A_1' - A_1'B_1';$$

$$A_1A_1' = v_1t + \frac{a_1t^2}{2};$$

$$A_1'B_1' = L_1;\ A_1B_1' = v_1t + \frac{a_1t^2}{2} - L_1;$$

$$A_2B_2' = A_2'B_2' - A_2A_2';$$

$$A_2A_2' = v_2t + \frac{a_2t^2}{2};$$

$$A_2'B_2' = L_2;\ A_2B_2' = L_2 - (v_2t + \frac{a_2t^2}{2});$$

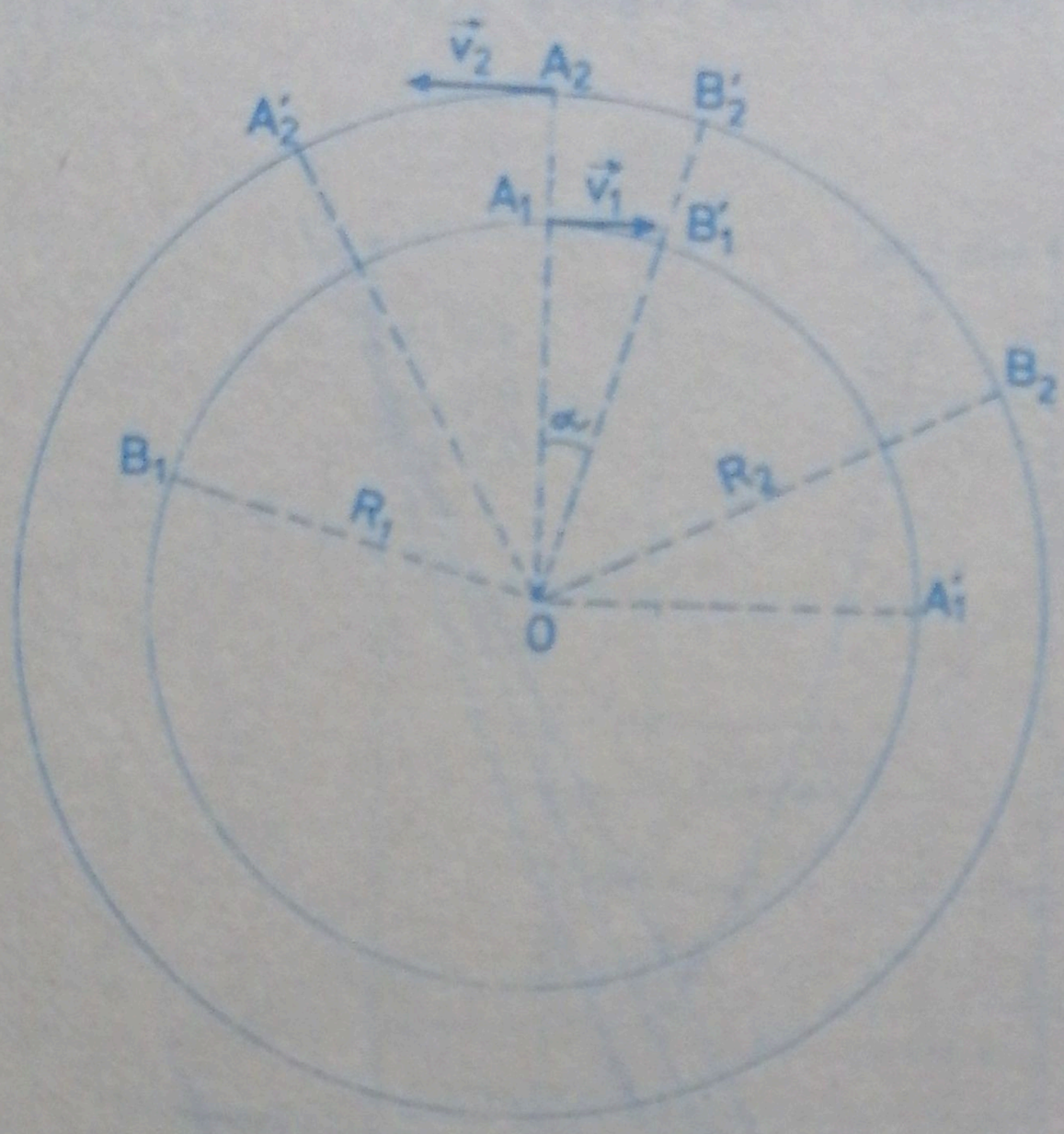


Figura I.5

$$A_1B_1' = \alpha R_1;\ A_2B_2' = \alpha R_2;$$

$$\frac{A_1B_1'}{R_1} = \frac{A_2B_2'}{R_2}; \qquad (3)$$

$$(R_2a_1+R_1a_2)t^2+2(R_2v_1+R_1v_2)t-2(R_2L_1+R_1L_2) = 0;$$

$$t = \frac{\sqrt{(R_2v_1+R_1v_2)^2+2(R_2a_1+R_1a_2)(R_2L_1+R_1L_2)} - (R_2v_1+R_1v_2)}{R_2a_1 + R_1a_2}.$$

Caz particular:

$$L_1 = (v_1 + v_2)t_1;\ L_2 = (v_1 + v_2)t_2;$$

$$t = \frac{L_1 + L_2}{v_1 + v_2}.$$

Problema 7

Legile de mişcare pentru un număr de şase mobile, care se deplasează pe traiectorii paralele apropiate sînt reprezentate grafic în desenul din figura I.6.

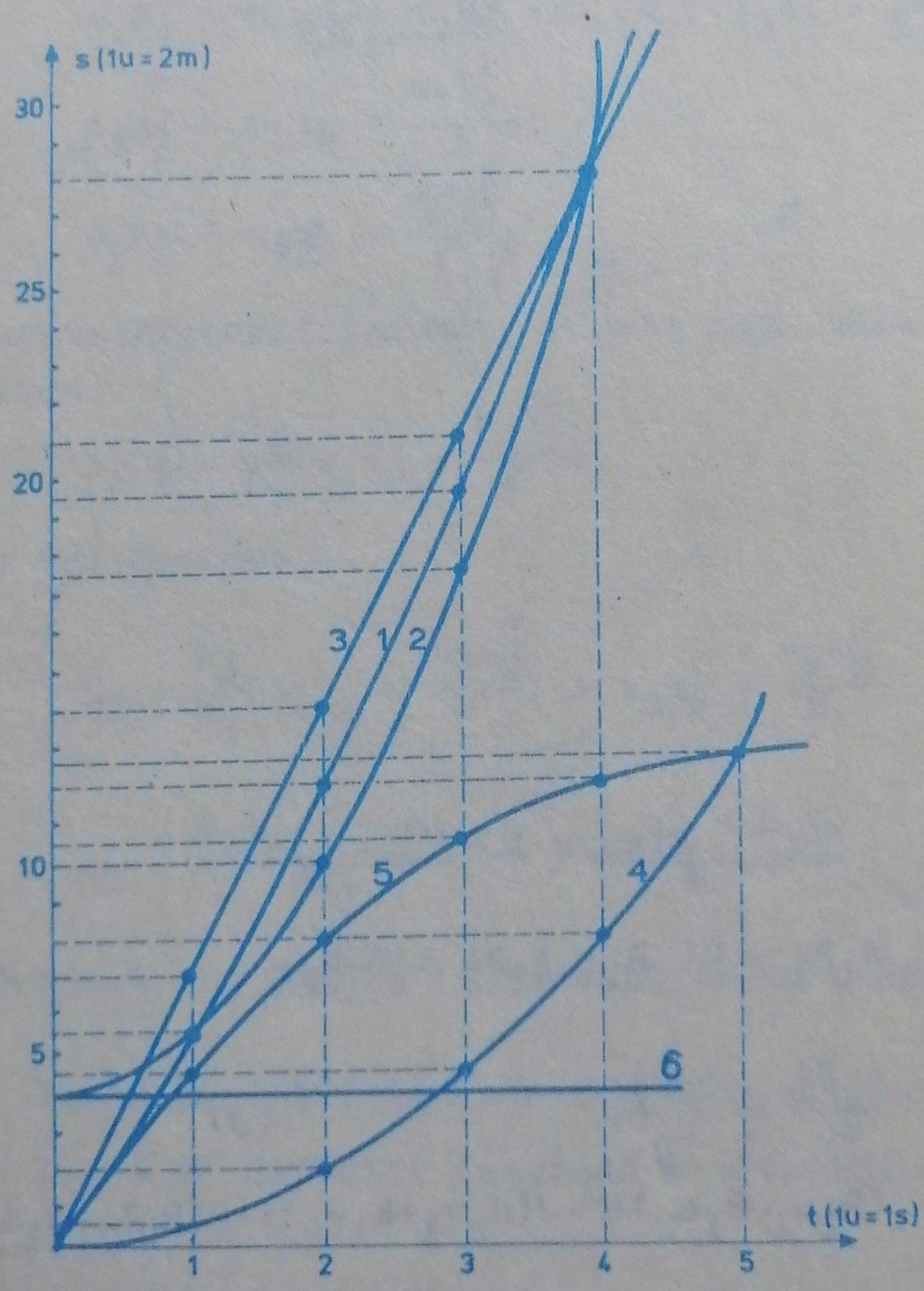


Figura I.6

1) Ce fel de mişcare execută fiecare mobil?

2) Care mobile se întîlnesc? Unde? Cînd?

3) Să se scrie ecuaţiile coordonatelor de poziţie şi ecuaţiile vitezelor mobilelor şi să se verifice prin calcul rezultatele anterioare.

4) Considerînd numai primele trei mobile să se calculeze după cît timp se vor afla la distanţe egale unul în spatele celuilalt. Cîte situaţii sînt posibile?

Rezolvare

1)

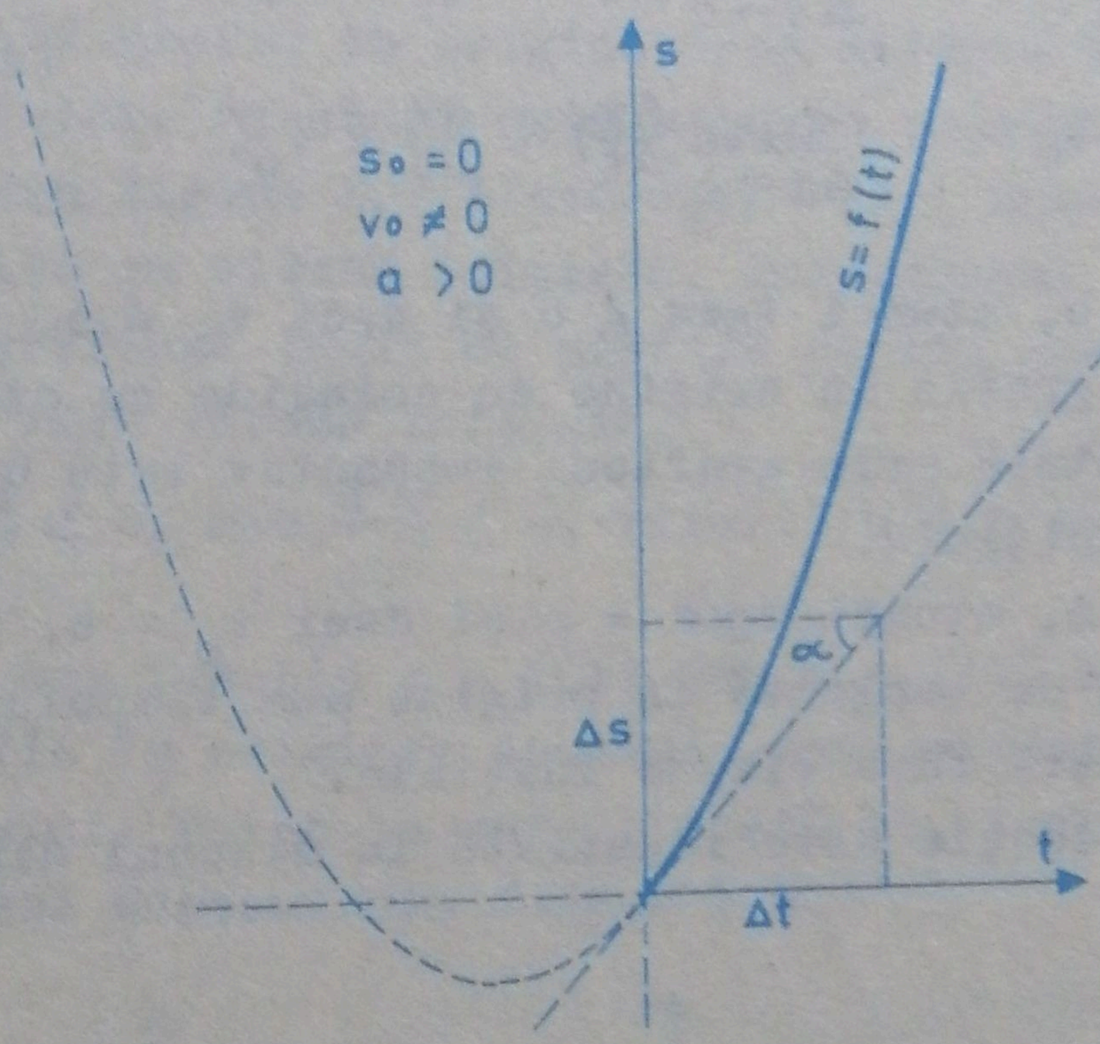


Figura I.7

Ecuaţia coordonatei de poziţie (legea de mişcare) într-o mişcare uniform variată se scrie în forma cea mai generală astfel:

$$x = x_o + v_o t + \frac{at^2}{2},$$

sau:

$$s = s_o + v_o t + \frac{at^2}{2}.$$

Derivata întîia a coordonatei de poziţie în raport cu timpul, calculată la momentul t = o, reprezintă viteza iniţială a mobilului, adică:

$$\left\{\frac{dx}{dt}\right\}_{t=o} = v_o;$$

$$\left\{\frac{ds}{dt}\right\}_{t=o} = v_o. \qquad (1)$$

In desenul din figura I.7 am reprezentat graficul legii de mişcare într-o mişcare uniform accelerată cu viteză iniţială.

Să amintim interpretarea cinematică a tangentei trigonometrice a unghiului format de axa timpului şi tangenta geometrică dusă la grafic prin originea acestuia:

$$tg\alpha = \underset{\Delta t \to o}{\text{limita}}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt} = v_o;$$

$$tg\,\alpha = \underset{\Delta t \to o}{\text{limita}}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{dx}{dt} = v_o. \qquad (2)$$

Dacă $\alpha \neq o$, atunci $tg\alpha \neq o$ şi deci $v_o \neq o$. Deci atunci cînd tangenta la grafic în origine nu coincide cu axa timpului, mişcarea reprezentată prin graficul respectiv este uniform variată cu viteză iniţială.

Dacă $\alpha = o$, atunci $tg\alpha = o$ şi deci $v_o = o$. Deci atunci cînd graficul are ca tangentă în origine axa timpului, mişcarea este uniform variată fără viteză iniţială.

Această situaţie este ilustrată în desenul din figura I.8.

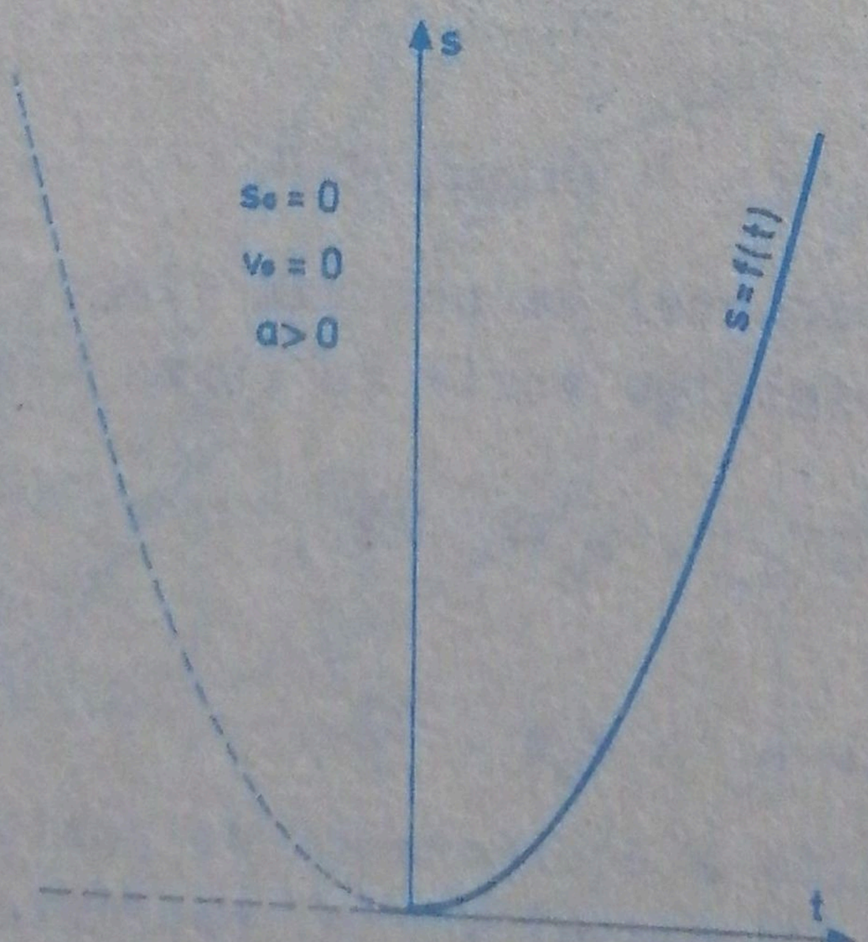


Figura I.8

Derivata a doua a coordonatei de poziţie în raport cu timpul reprezintă acceleraţia mişcării, adică:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a;$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a. \qquad (3)$$

Din cunoaşterea semnului acestei derivate recunoaştem felul mişcării variate: accelerată sau încetinită.

Dacă: $\frac{d^2x}{dt^2} > o$, sau $\frac{d^2s}{dt^2} > o$, rezultă $a > o$ (mişcare accelerată). In acest caz funcţia $x = f(t)$ sau $s = f(t)$ are un minim. Tangenta la grafic în origine este situată în partea dreaptă a graficului. Parabola este situată cu vîrful în jos.

Desenul din figura I.7 ilustrează cazul unei mişcări uniform accelerate cu viteză iniţială, iar desenul din figura I.8 ilustrează graficul legii de mişcare pentru o mişcare uniform accelerată fără viteză iniţială.

Dacă: $\frac{d^2x}{dt^2} < o$, sau $\frac{d^2s}{dt^2} < o$, rezultă $a < o$ (mişcare încetinită).

In acest caz funcţia $x = f(t)$ sau $s = f(t)$ are un maxim. Tangenta la grafic în originea acestuia este situată în partea stîngă a graficului. Parabola este situată cu vîrful în sus, aşa cum ilustrează desenul din figura I.9.

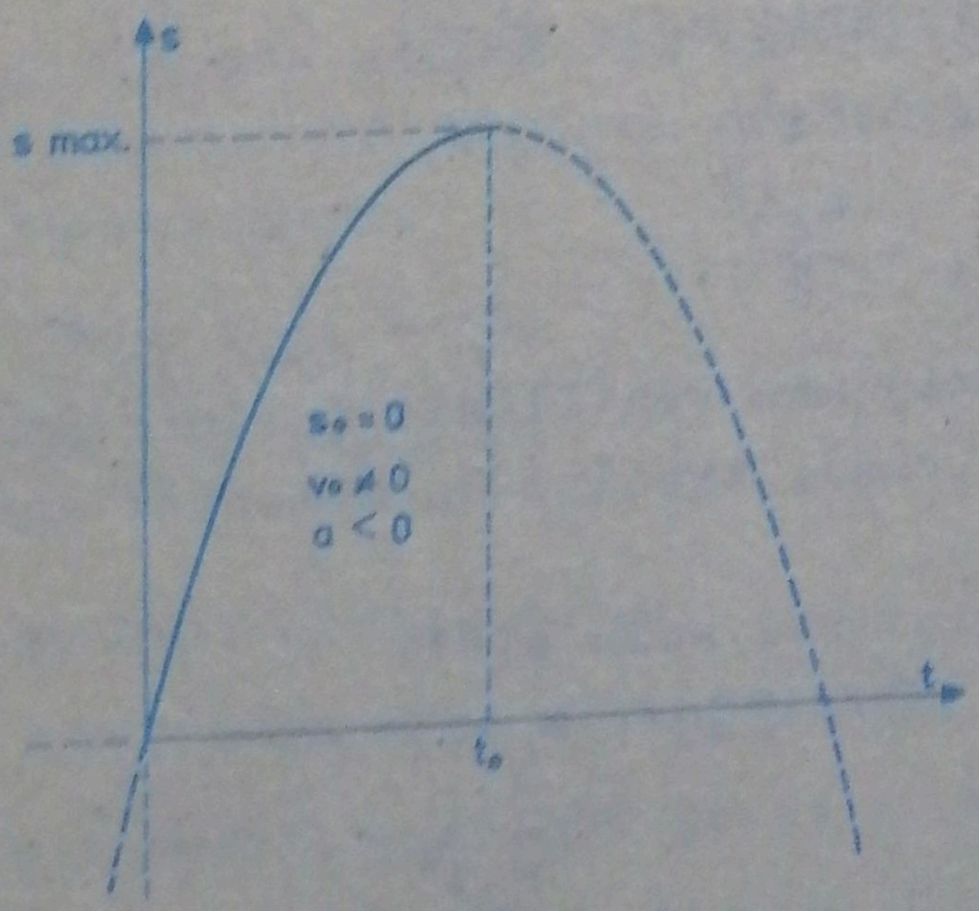


Figura I.9

Pe baza acestor precizări putem interpreta graficul legii de mişcare pentru fiecare dintre cele şase mobile.

Mobilul 1: mişcare rectilinie uniform accelerată (graficul este o parabolă cu vîrful în jos), cu viteză iniţială ($\alpha \neq 0$), plecînd din origine ($s_o = 0$).

Ecuaţiile mişcării sale sînt:

$$v_1 = v_{o1} + a_1 t;$$

$$s_1 = v_{o1} t + \frac{a_1 t^2}{2}.$$

Mobilul 2: mişcare rectilinie uniform accelerată (parabola are vîrful în jos), fără viteză iniţială ($\alpha = 0$), plecînd de la coordonata $s_o = 8$ m.

Ecuaţiile mişcării sale sînt:

$$v_2 = a_2 t;$$

$$s_2 = s_{o2} + \frac{a_2 t^2}{2}.$$

Mobilul 3: mişcare rectilinie uniformă (graficul este o linie dreaptă, care pentru $t = 0$ trece prin origine).

Ecuaţia mişcării sale este:

$$s_3 = v_3 t.$$

Mobilul 4: mişcare rectilinie uniform accelerată (parabola are vîrful în jos), fără viteză iniţială ($\alpha = 0$), plecînd din origine.

Ecuaţiile mişcării sale sînt:

$$v_4 = a_4 t;$$

$$s_4 = \frac{a_4 t^2}{2}.$$

Mobilul 5: mişcare rectilinie uniform încetinită (parabola are vîrful în sus), trecînd la momentul iniţial prin origine.

Ecuaţiile mişcării sale sînt:

$$v_5 = v_{o5} + a_5 t;$$

$$s_5 = v_{o5} t + \frac{a_5 t^2}{2}; \quad a_5 < 0.$$

Mobilul 6: repaus (graficul este o dreaptă paralelă cu axa timpului) în punctul de coordonată 8 m.

2) Faptul că graficele care reprezintă legile de mişcare a două sau mai multe mobile se intersectează într-un punct, semnifică momentul şi locul întîlnirii mobilelor.

Analizînd desenul din figura I.6 se poate completa următorul tabel:

Mobilele care se întîlnesc	Locul de întîlnire	Momentul întîlnirii
2; 3	9 m	o,6 s
1; 6	8 m	o,7 s
5; 6	8 m	o,9 s
1; 2	11 m	1,o s
4; 6	8 m	2,8 s
1; 2; 3	56 m	4,o s
4; 5	27 m	5,o s

3) Pe baza datelor înscrise în desenul din figura I.6, rezultă:

pentru $t = 1s$; $s_1 = 11$ m;

pentru $t = 2$ s; $s_1 = 24$ m.

Introducem fiecare pereche de valori $(t; s_1)$ în ecuaţia lui s_1 scrisă la punctul 1). Obţinem următorul sistem de două ecuaţii cu două necunoscute:

$$2v_{o1} + a_1 = 22;$$

$$2v_{o1} + 2a_1 = 24.$$

Soluţia acestui sistem este:

$$v_{o1} = 1o \text{ m/s}; \quad a_1 = 2 \text{ m/s}^2.$$

Ecuaţiile mişcării primului mobil sînt:

$$v_1 = 1o + 2t; \quad s_1 = 1o\,t + t^2.$$

Procedînd în mod asemănător se stabilesc şi pentru celelalte mobile următoarele ecuaţii:

$$v_2 = 6t;\ s_2 = 8 + 3t^2;$$
$$v_3 = 14\ m/s;\ s_3 = 14\ t;$$
$$v_4 = 2t;\ s_4 = t^2;$$
$$v_5 = 1o - 2t;\ s_5 = 1o\ t - t^2.$$

Verificăm acum prin calcul întîlnirile stabilite la punctul 2).

Intîlnirea 2;3

Din condiţia: $s_2 = s_3$, rezultă ecuaţia:

$$3t^2 - 14\ t + 8 = o,$$

ale cărei rădăcini sînt: $t' = 2/3$ s şi $t'' = 4$ s. Ecuaţia avînd două rădăcini reale distincte însemnează că mobilele s-au întîlnit de două ori, ceea ce a rezultat şi din analiza grafică.

Intîlnirea 1;6

Din condiţia de întîlnire: $s_1 = s_6$, unde $s_6 = 8$ m, rezultă ecuaţia:

$$t^2 + 1o\ t - 8 = o.$$

Singura soluţie acceptabilă este: $t' = o,7$ s.

Intîlnirea 5;6

Din condiţia: $s_5 = s_6$, rezultă ecuaţia:

$$t^2 - 1o\ t + 8 = o,$$

cu rădăcinile: $t' = o,9$ s şi $t'' = 9,1$ s. Cu toate că ambele rădăcini sînt reale, numai prima are sens fizic. Trebuie să ţinem seama că mobilul 5 are o mişcare încetinită, deci el se va opri la un anumit moment. Din ecuaţia vitezei acestuia rezultă că el se va opri după $t = 5$ s.

Intîlnirea 1;2

Din condiţia: $s_1 = s_2$, rezultă:

$$t^2 - 5\ t + 4 = o;\ t' = 1\ s;\ t'' = 4\ s.$$

Intîlnirea 4;6

$$s_4 = s_6;\ t^2 = 8;\ t = 2{,}8\ s.$$

Intîlnirea 4; 5

$$s_4 = s_5;\ 2t^2 - 10\ t = 0;\ t' = 0;\ t'' = 5\ s.$$

4) Cele trei situaţii posibile sînt reprezentate în desenul din figura I.1o.

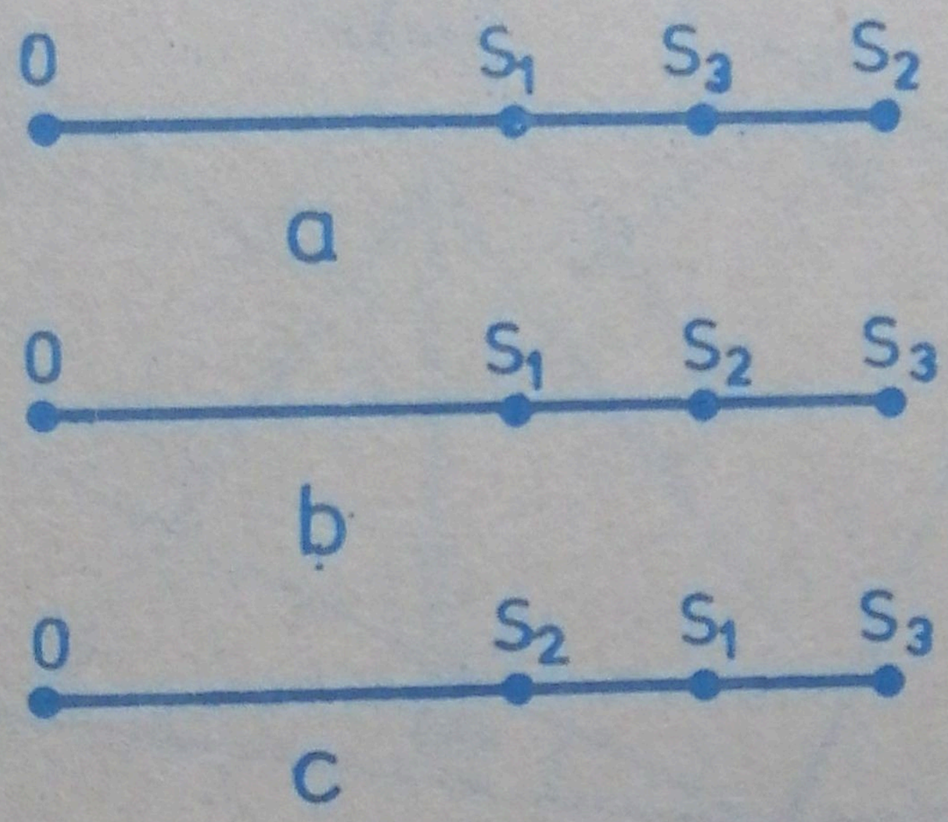


Figura I.1o

a) $$s_3 = \frac{s_1 + s_2}{2};$$

$$t = 0{,}5\ s.$$

b) $$s_2 = \frac{s_1 + s_3}{2};$$

$$t = 0{,}8\ s.$$

c) $$s_1 = \frac{s_2 + s_3}{2};$$

$$t = 2\ s.$$

Problema 8

Să se determine acceleraţia corpului care alunecă pe ghidajul înclinat reprezentat în desenul din figura I.11.

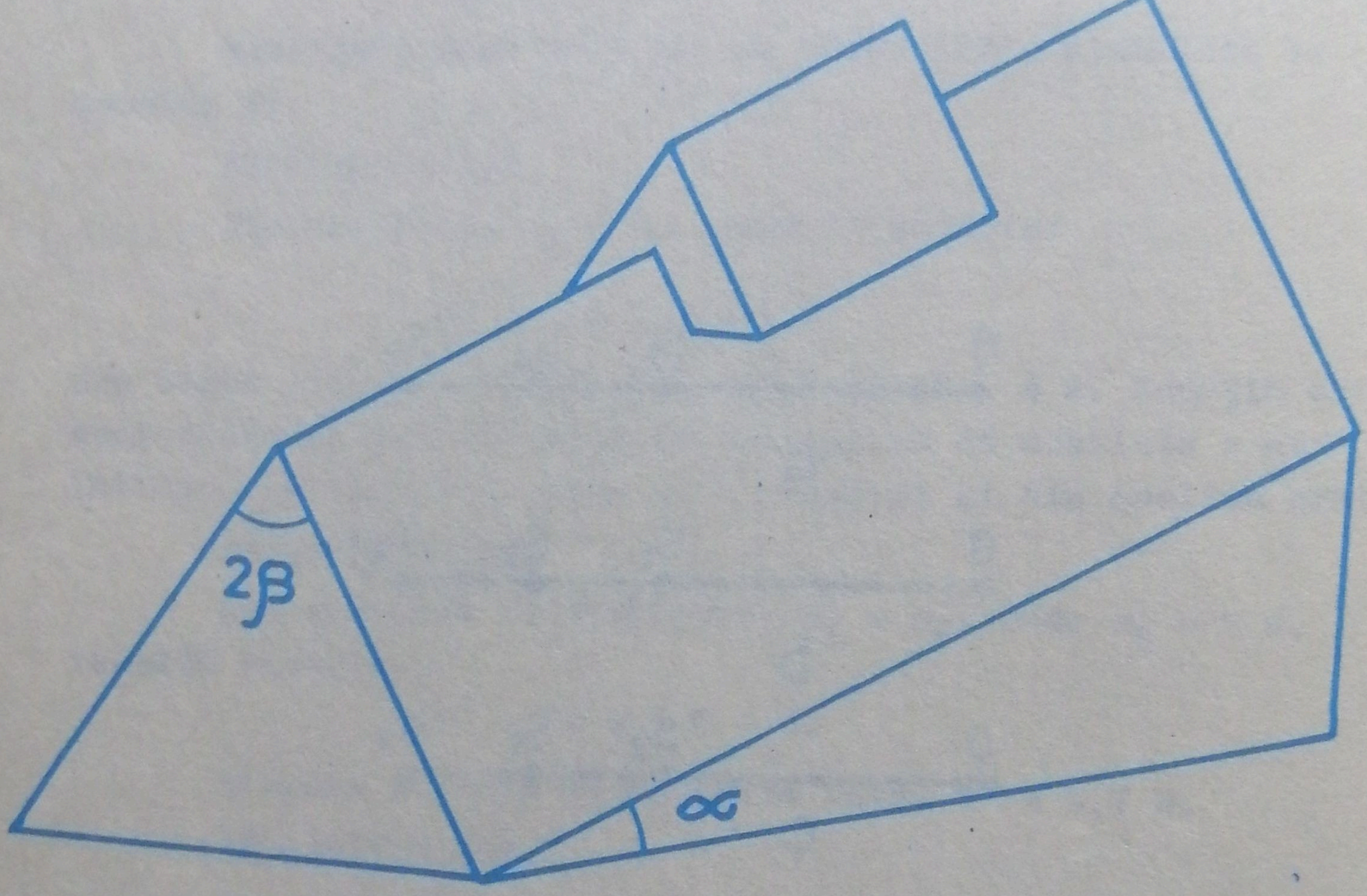


Figura I.11

Rezolvare

In desenul din figura I.12 a am reprezentat planul vertical care conţine muchia ghidajului (planul de simetrie al ghidajului) şi am realizat descompunerea greutăţii corpului în două componente după direcţii perpendiculare conţinute în acest plan.

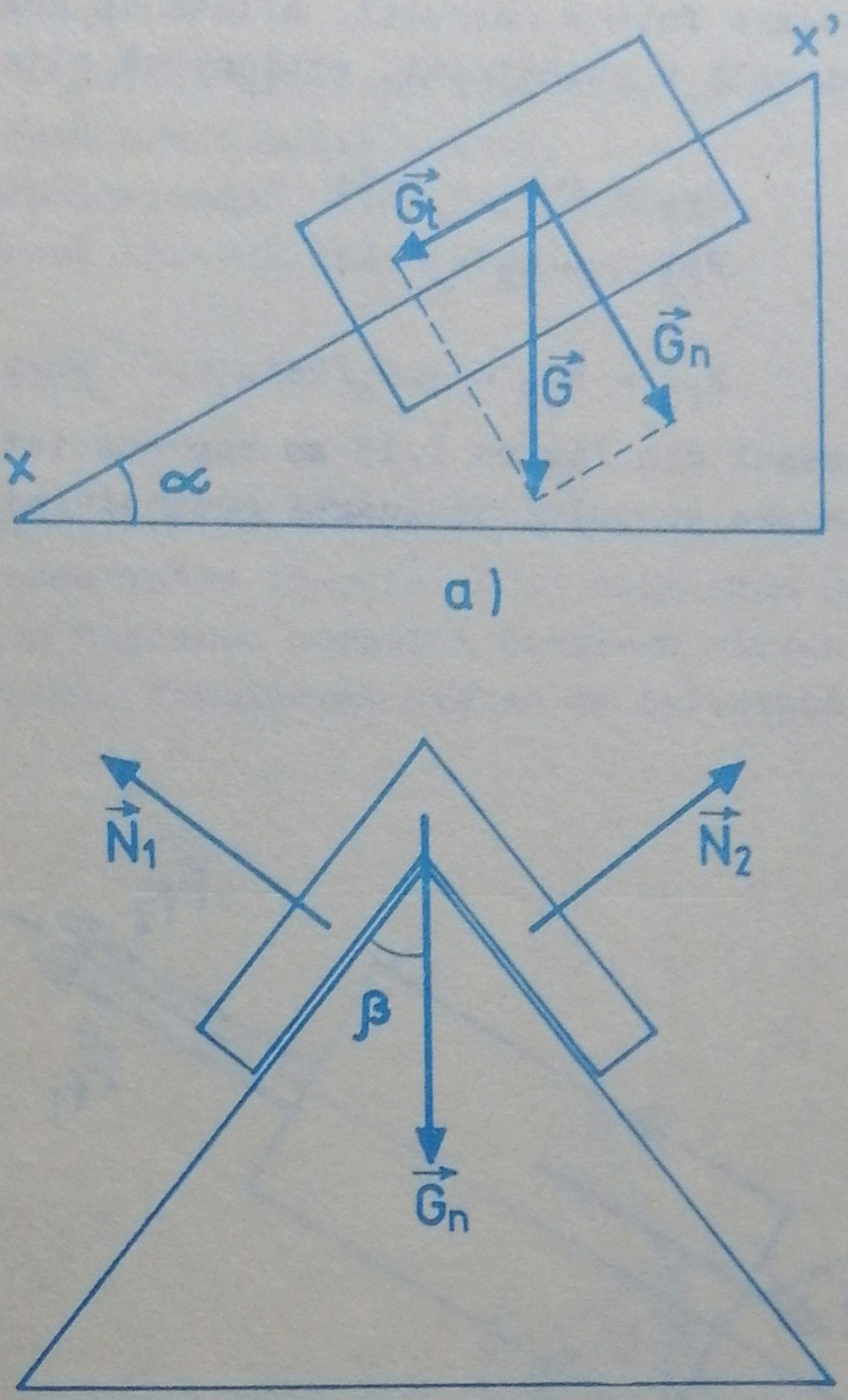


Figura I.12

$$\vec{G} = \vec{G}_t + \vec{G}_n;$$

$$G_t = G\sin\alpha \; ; \; G_n = G\cos\alpha .$$

In desenul b din figura I.12 am considerat o secţiune transversală a ghidajului şi am reprezentat forţele care acţionează asupra corpului în planul acestei secţiuni. Rezultanta acestor forţe este nulă.

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G}_n = 0;$$

$$N_1 = N_2 = N; \; 2N\sin\beta = G_n; \; N = G_n/2\sin\beta .$$

Pe fiecare faţă a corpului, aflată în contact cu cîte o suprafaţă laterală a ghidajului, acţionează cîte o forţă de frecare:

$$F_{f1} = \mu N_1 = \mu N;$$
$$F_{f2} = \mu N_2 = \mu N;$$

$$F_{f1} = F_{f2} = \mu G_n / 2\sin\beta .$$

In desenul din figura I.13 am reprezentat forţele care acţionează asupra corpului în lungul muchiei ghidajului.

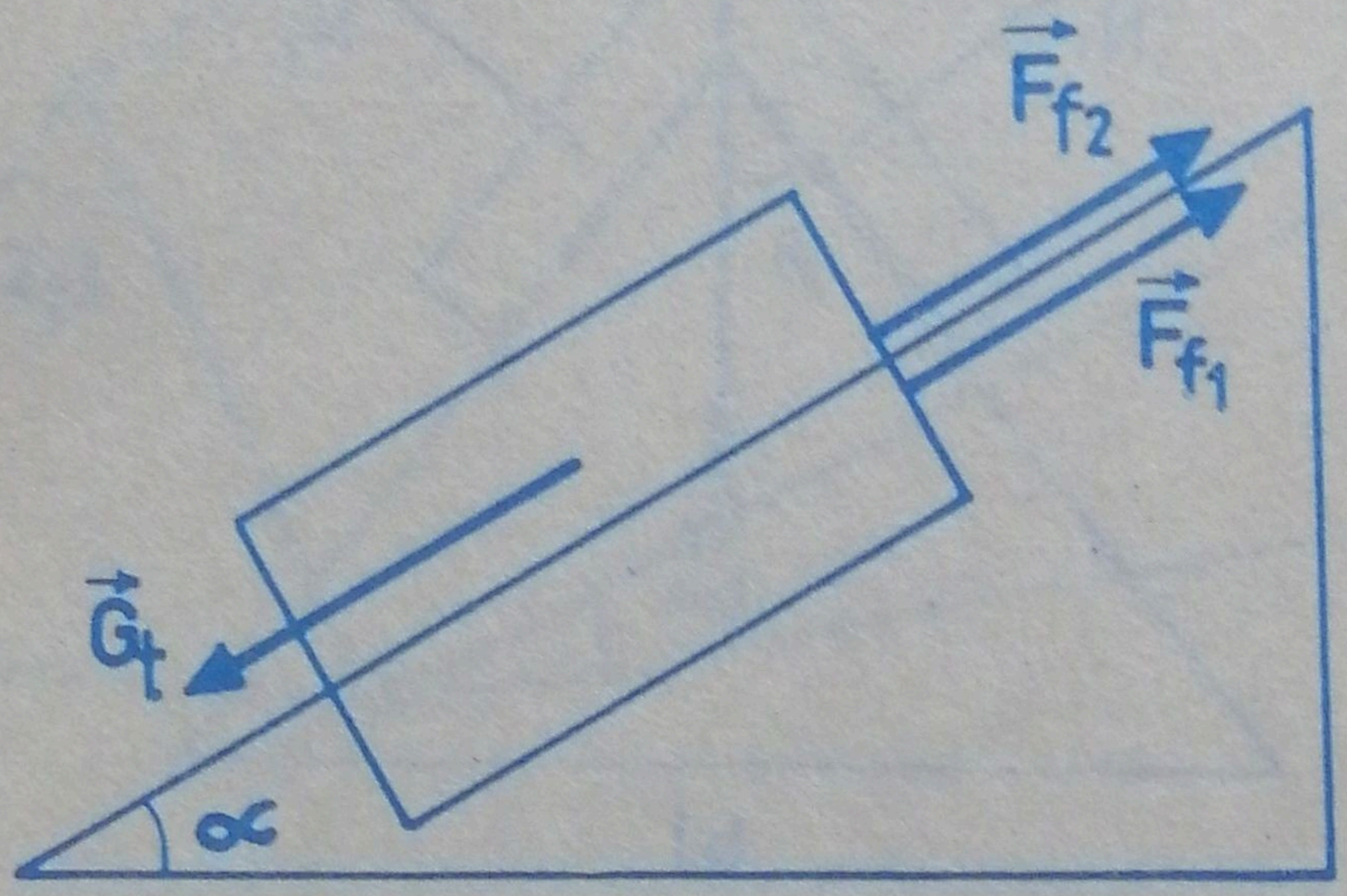


Figura I.13

Rezultă:

$$m\vec{a} = \vec{G}_t + \vec{F}_{f1} + \vec{F}_{f2};$$

$$ma = G_t - F_{f1} - F_{f2};$$

$$ma = G_t - 2\mu G_n / 2\sin\beta ;$$

$$a = g(\sin\alpha - \mu \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}).$$

Problema 9

Să se studieze mişcarea unui corp pe un plan înclinat. Se vor considera următoarele cazuri:

1) corpul alunecă spre baza pantei;

2) corpul alunecă spre vîrful pantei.

Rezolvare

1)

Metoda observatorului inerţial

Prin observator inerţial (OI) înţelegem un observator care urmăreşte mişcarea corpului dintr-un sistem de referinţă solidar cu solul, considerat sistem de referinţă inerţial (SI).

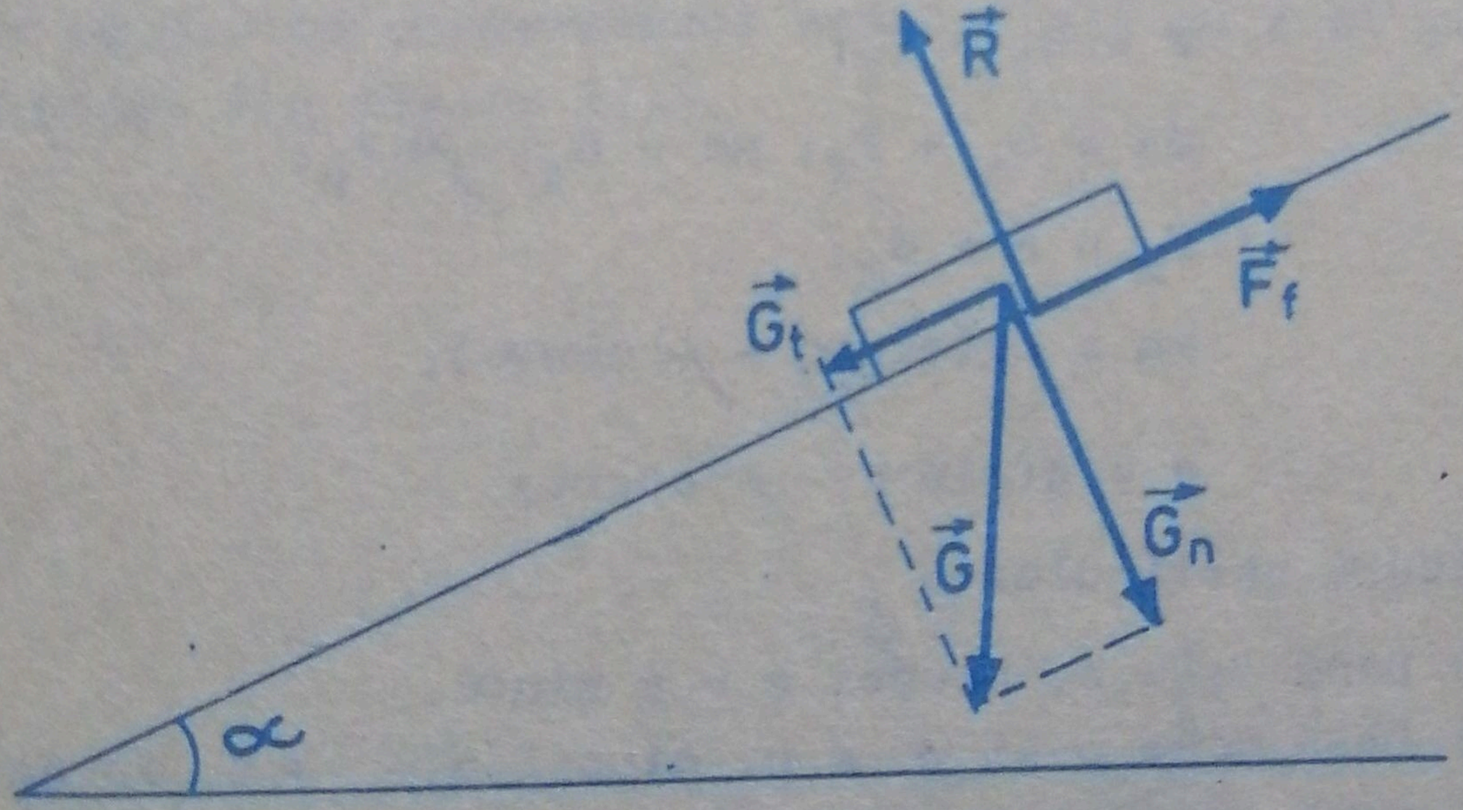


Figura I.14

Considerîndu-ne un astfel de observator putem afirma că asupra corpului care alunecă pe planul înclinat, spre baza acestuia acţionează următoarele forţe: greutatea corpului ($\vec{G}$); forţa de frecare ($\vec{F}_f$); reacţia normală a pantei ($\vec{R}$).

Aceste forţe au fost reprezentate în desenul din figura I.14, unde am efectuat şi descompunerea forţei de greutate după două direcţii concurente perpendiculare.

Rezolvarea problemei prin această metodă presupune remarcarea faptului că pentru forţa care îi imprimă corpului acceleraţie se pot scrie două expresii:

$$\vec{F} = m\vec{a};$$

$$\vec{F} = \vec{G}_t + \vec{F}_f.$$

Forţa care îi imprimă corpului acceleraţie este rezultanta vectorială a forţelor care acţionează asupra corpului, pe direcţia mişcării. Prin convenţie, vom scrie întotdeauna ca prim termen în membrul al doilea, vectorul cu modulul mai mare.

Să calculăm modulul lui $\vec{F}$ din cele două relaţii şi apoi să egalăm expresiile găsite:

$$F = ma;$$

$$F^2 = G_t^2 + F_f^2 + 2G_tF_f\cos 180^o;$$

$$F^2 = (G_t - F_f)^2;$$

$$F = G_t - F_f;$$

$$ma = G_t - F_f;\quad ma = G_t - \mu F_n;$$

$$F_n = R = G_n;$$

$$ma = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha);$$

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Cazuri particulare:

1) Dacă $\mu = 0$, atunci $a = g\sin\alpha$.

2) Dacă $\alpha = 0$ şi $\mu \neq 0$, atunci $a = -\mu g$. În acest caz corpul alunecă pe un plan orizontal, uniform încetinit.

3) Dacă $\alpha = 0$, atunci $a = g$ (cădere în cîmp gravitaţional

Metoda observatorului neinerţial

Prin observator neinerţial (ON) înţelegem un observator care urmăreşte mişcarea corpului dintr-un sistem de referinţă solidar cu corpul, considerat sistem de referinţă neinerţial(SN).

Să ne considerăm deci un astfel de observator, prezent

pe suprafaţa corpului aflat în mişcare caracterizată de acceleraţia $\vec{a}$. Spre deosebire de cazul anterior (OI), acum trebuie luată în considerare şi forţa de inerţie. Dovada faptului că această forţă este existentă numai în raport cu observatorul neinerţial o avem la plecarea bruscă a unui autobuz din staţie. Cel ce a rămas pe trotuar (OI) nu are motiv să cadă pe spate, în timp ce observatorul din autobuz (ON), va simţi acţiunea unei forţe de inerţie.

Pentru un observator neinerţial este adevărat principiul lui d'Alembert, care afirmă că: rezultanta vectorială a forţelor reale şi a forţelor de inerţie, într-un sistem de referinţă neinerţial este zero.

Reprezentarea vectorului forţă de inerţie se poate face ştiind că direcţia sa este identică cu direcţia vectorului acceleraţie, sensul său este opus sensului vectorului acceleraţie, iar modulul său este $F_i = ma$. Rezultă:

$$\vec{F}_i = - m\vec{a}.$$

Forţele care acţionează asupra corpului de pe planul înclinat, în raport cu observatorul neinerţial, au fost reprezentate în desenul din figura I.15.

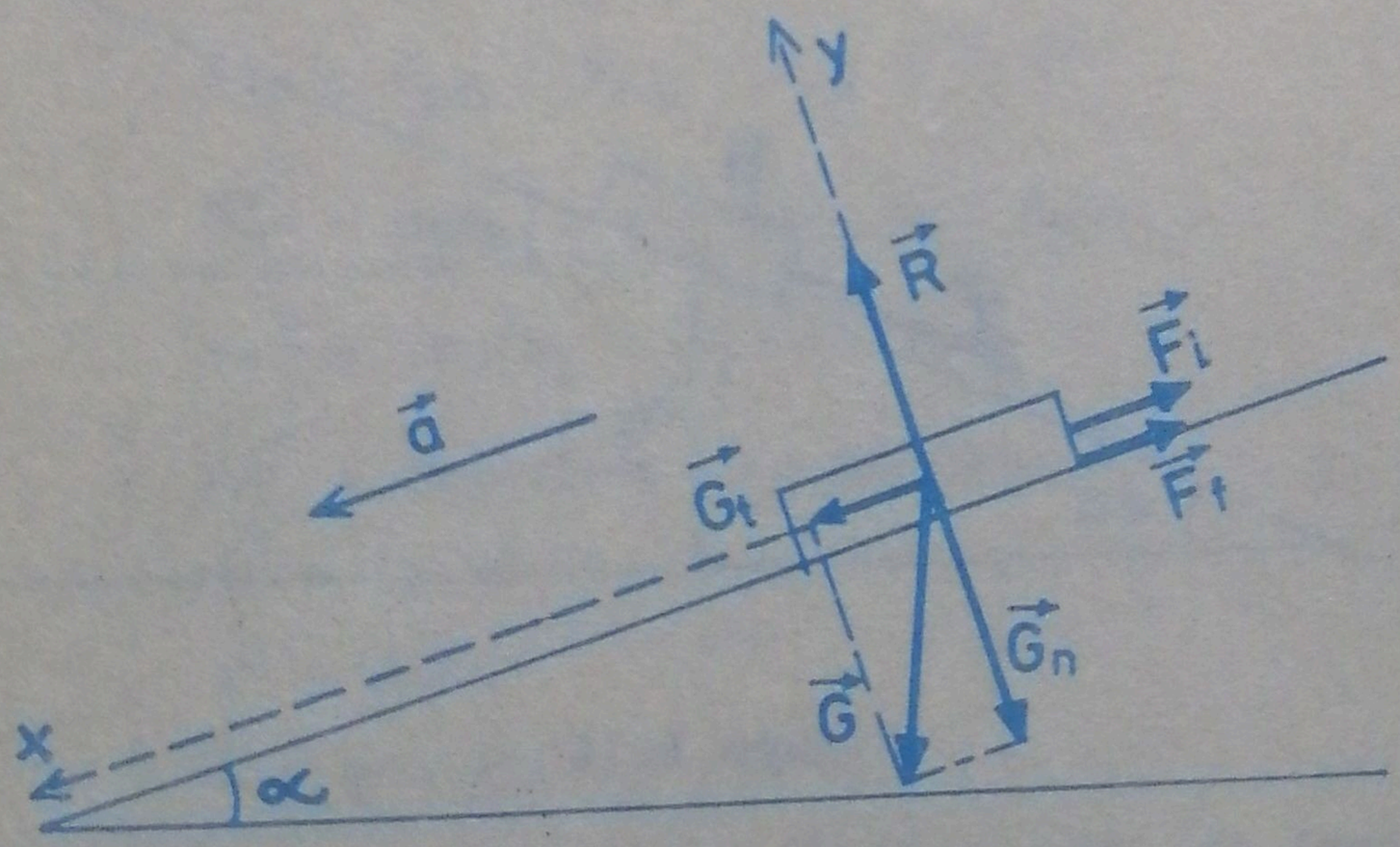


Figura I.15

Aplicînd principiul lui d'Alembert rezultă:

$$\vec{G} + \vec{F}_i + \vec{F}_f + \vec{R} = o,$$

sau pentru forţele care acţionează pe cele două direcţii perpendiculare:

$$\vec{G}_t + \vec{F}_i + \vec{F}_f = o;$$
$$\vec{G}_t - m\vec{a} + \vec{F}_f = o;$$
$$\vec{R} + \vec{G}_n = o.$$

Pentru transcrierea în modul a fiecărei relaţii, observînd că vectorii conţinuţi în fiecare relaţie sînt coliniari, să alegem, prin convenţie, un sens pozitiv pentru fiecare grup de vectori. De exemplu: pentru vectorii paraleli cu panta se iau cu semnul plus modulele vectorilor orientaţi la fel cu vectorul acceleraţie.

Rezultă:

$$G_t - ma - F_f = o; \quad R - G_n = o;$$
$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Metoda teoremei variaţiei energiei cinetice

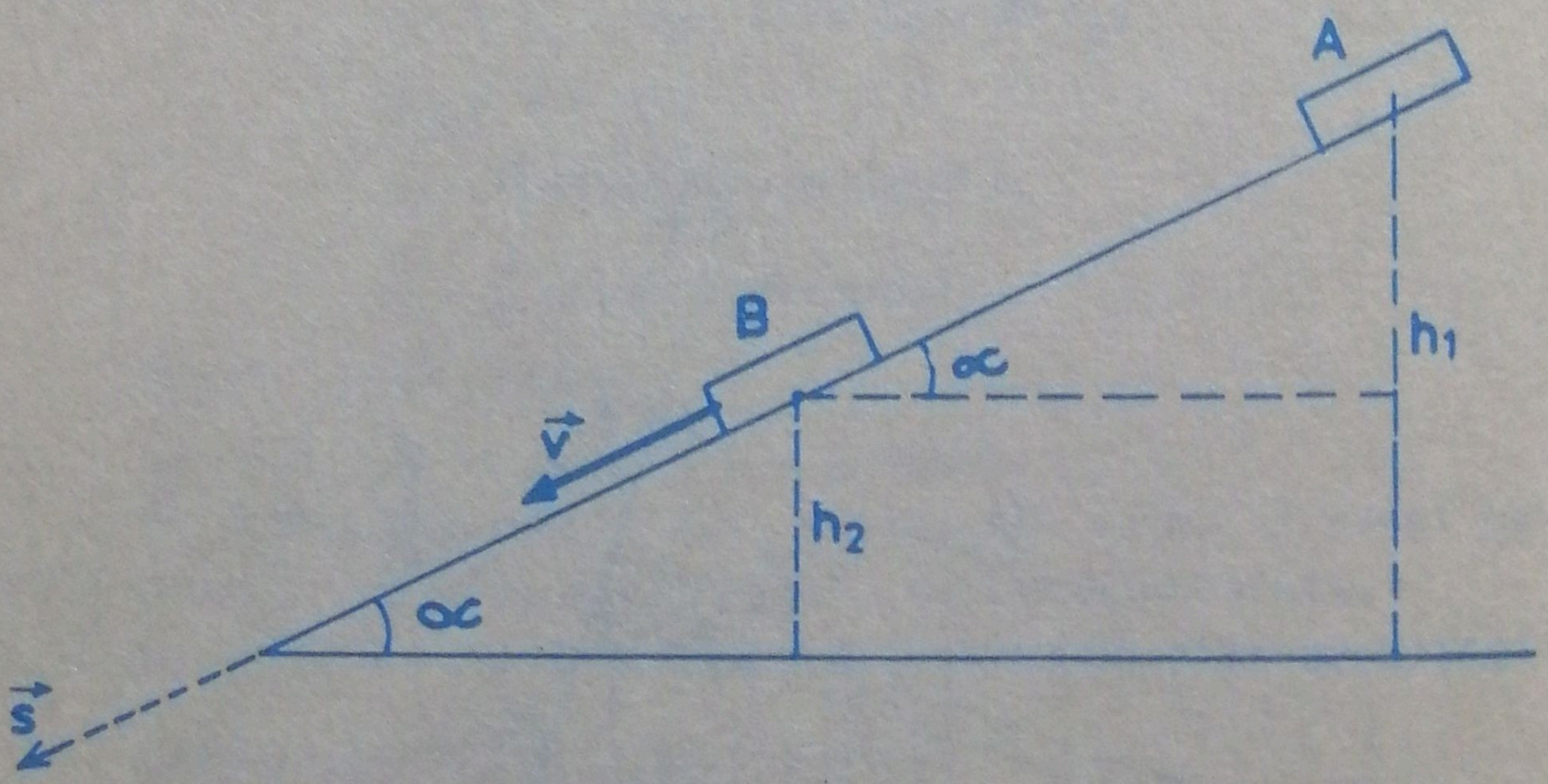


Figura I.16

Desenul din figura I.16 prezintă corpul la momentul iniţial în repaus în punctul A şi apoi în mişcare, la momentul t, în punctul B.

Variaţia energiei cinetice a corpului este egală cu lucrul mecanic al rezultantei tuturor forţelor reale care acţionează asupra sa.

$$E_{cB} - E_{cA} = L_{\vec{G}_t} + L_{\vec{F}_f} + L_{\vec{R}} + L_{\vec{G}_n};$$

$$\frac{mv^2}{2} - o = \vec{G}_t \cdot \vec{s} + \vec{F}_f \cdot \vec{s} + \vec{R} \cdot \vec{s} + \vec{G}_n \cdot \vec{s};$$

$$\frac{mv^2}{2} = G_t s - F_f s;$$

$$mv^2 = 2mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)s;$$

$$v^2 = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)s.$$

Ecuaţia vitezei în punctul B se poate scrie şi cu formula lui Galilei:

$$v^2 = 2as.$$

Identificînd coeficienţii ultimelor două ecuaţii rezultă:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Metoda teoremei variaţiei energiei mecanice totale

Variaţia energiei mecanice totale a unui sistem este egală cu lucrul mecanic al forţelor de frecare.

$$E_B - E_A = L_{\vec{F}_f};$$

$$E_{cB} + E_{pB} - E_{cA} - E_{pA} = \vec{F}_f \cdot \vec{s};$$

$$\frac{mv^2}{2} + mgh_2 - o - mgh_1 = - F_f s:$$

$$mv^2 = 2mg(h_1 - h_2) - 2F_f s;$$

$$mv^2 = 2mgs\sin\alpha - 2\mu mg\cos\alpha\ s;$$

$$v^2 = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)s;$$

$$v^2 = 2as;$$

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Observaţie

Cazul pe care l-am rezolvat se referă la un corp plecat din repaus, alunecînd uniform accelerat spre baza pantei, ca

urmare a faptului că: $G_t > F_f$; $mg\sin\alpha > \mu mg\cos\alpha$; $tg\alpha > \mu$.

Dacă $G_t = F_f$, ($tg\alpha = \mu$), atunci mişcarea corpului este uniformă.

In cazul în care $G_t < F_f$, deci $tg\alpha < \mu$, atunci corpul rămîne în repaus în punctul de pe pantă unde a fost aşezat. Dacă un asemenea corp este aruncat pe pantă, spre baza acesteia, mişcarea sa va fi uniform încetinită.

Pentru a calcula valoarea acceleraţiei de frînare să presupunem mai întîi că asupra corpului acţionează spre baza pantei şi o forţă de tracţiune $\vec{F}_t$. Pentru rezultanta forţelor de pe direcţia mişcării se pot scrie expresiile:

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{G}_t + \vec{F}_f;$$
$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Transcriind în modul, rezultă:

$$a = \frac{F_t}{m} - g(\mu \cos\alpha - \sin\alpha).$$

Dacă la un anumit moment tracţiunea încetează ($F_t = o$), corpul îşi va continua mişcarea, coborînd uniform încetinit, cu acceleraţia de frînare:

$$a = - g(\mu \cos\alpha - \sin\alpha) < o.$$

2)

Metoda observatorului inerţial :

Să considerăm pentru început că o forţă de tracţiune $\vec{F}_t$ acţionează asupra corpului pentru a-l ridica pe planul înclinat. Situaţia este ilustrată în desenul din figura I.17.

Să observăm că pentru forţa care îi imprimă corpului acceleraţie se pot scrie relaţiile:

$$\vec{F} = m\vec{a}_1;$$
$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{G}_t + \vec{F}_f.$$

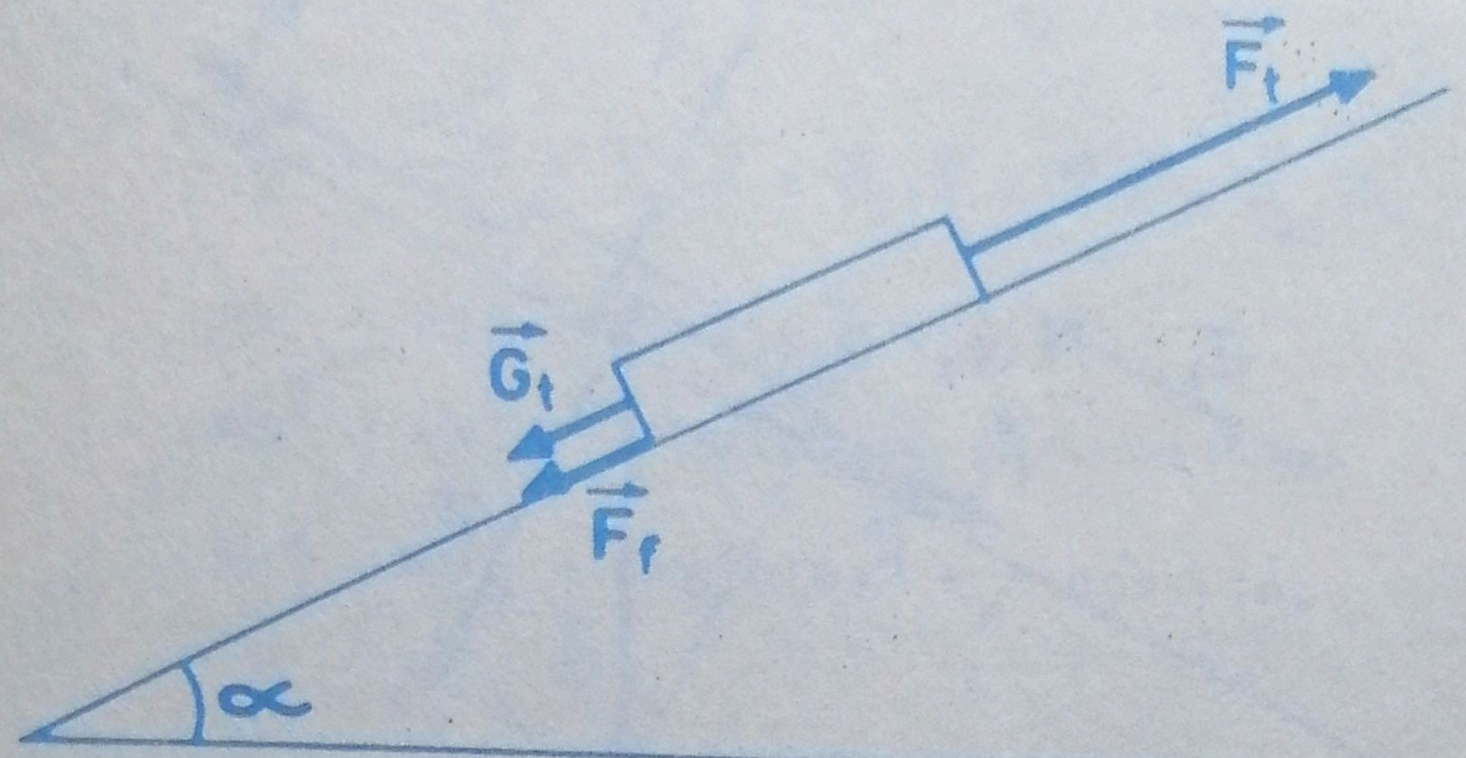


Figura I.17

Să notăm: $\vec{F}_1 = \vec{G}_t + \vec{F}_f$, unde $\vec{F}_1$ are aceeaşi orientare (direcţie şi sens) cu vectorii $\vec{G}_t$ şi $\vec{F}_f$.

$$F_1^2 = G_t^2 + F_f^2 + 2G_tF_f\cos o^\circ;$$

$$F_1 = G_t + F_f;$$

$$\bar{F} = \bar{F}_t + \bar{F}_1;$$

$$F^2 = F_t^2 + F_1^2 + 2F_tF_1\cos 180^\circ;$$

$$F = F_t - F_1;$$

$$F = F_t - (G_t + F_f);$$

$$F = ma_1;$$

$$a_1 = \frac{F_t}{m} - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Dacă la un anumit moment încetează tracţiunea ($F_t = o$), corpul se va mişca uniform încetinit, adînd acceleraţia de frînare:

$$a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) < o.$$

Metoda observatorului neinerţial

In desenul din figura I.18 în afara forţelor reale a fost reprezentată şi forţa de inerţie.

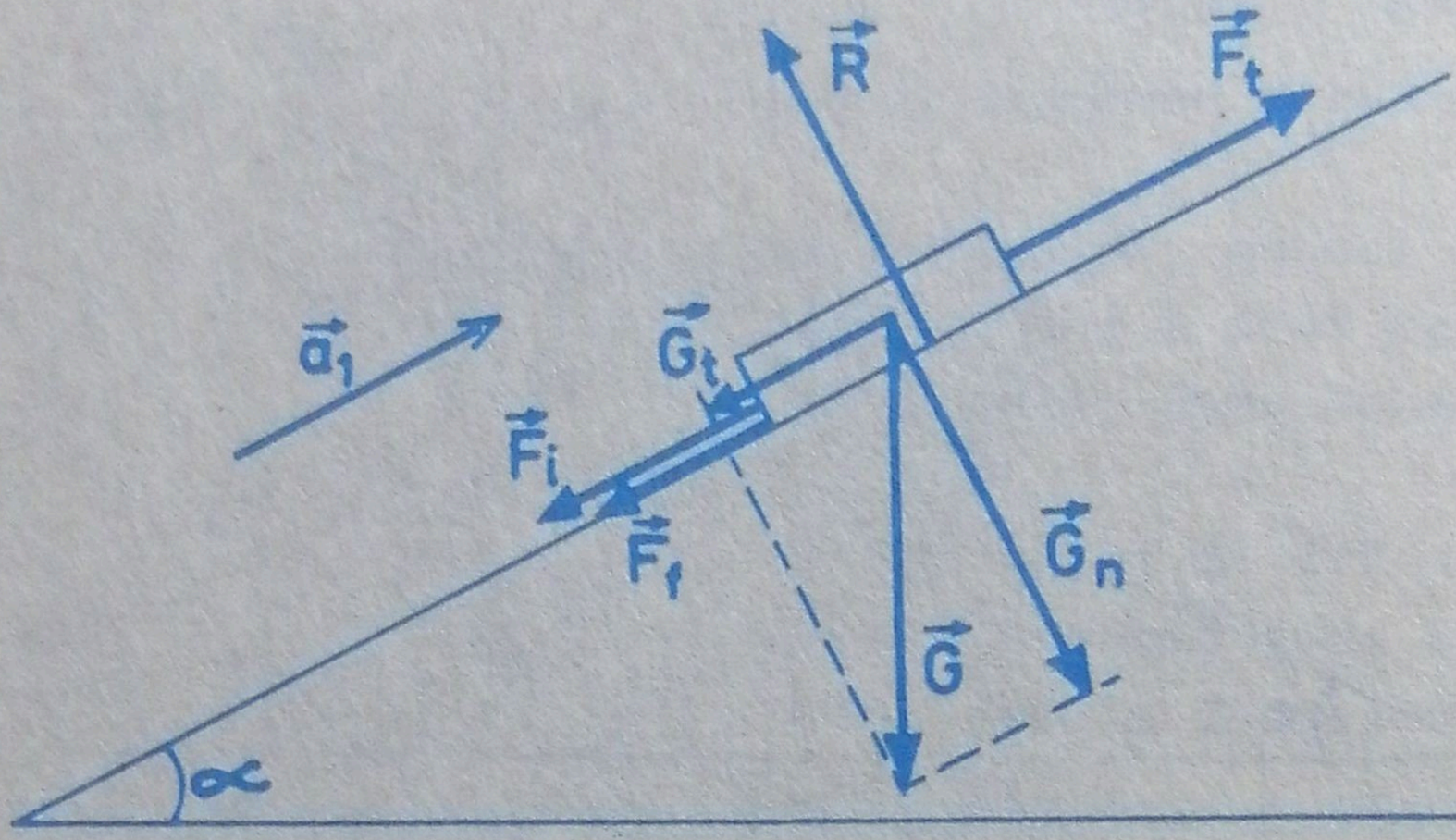


Figura I.18

Principiul lui d'Alembert conduce la:

$$\vec{F}_t + \vec{F}_i + \vec{G}_t + \vec{F}_f = o;$$

$$F_t - F_i - G_t - F_f = o;$$

$$a_1 = \frac{F_t}{m} - g(\sin\alpha + \mu \cos\alpha).$$

Incetarea tracţiunii conduce la:

$$a = - g(\sin\alpha + \mu \cos\alpha).$$

Metoda teoremei variaţiei energiei cinetice

Desenul din figura I.19 prezintă corpul în punctul de lansare A, la momentul iniţial, avînd viteza v_o şi apoi la un moment oarecare t, în punctul B, înainte de oprire.

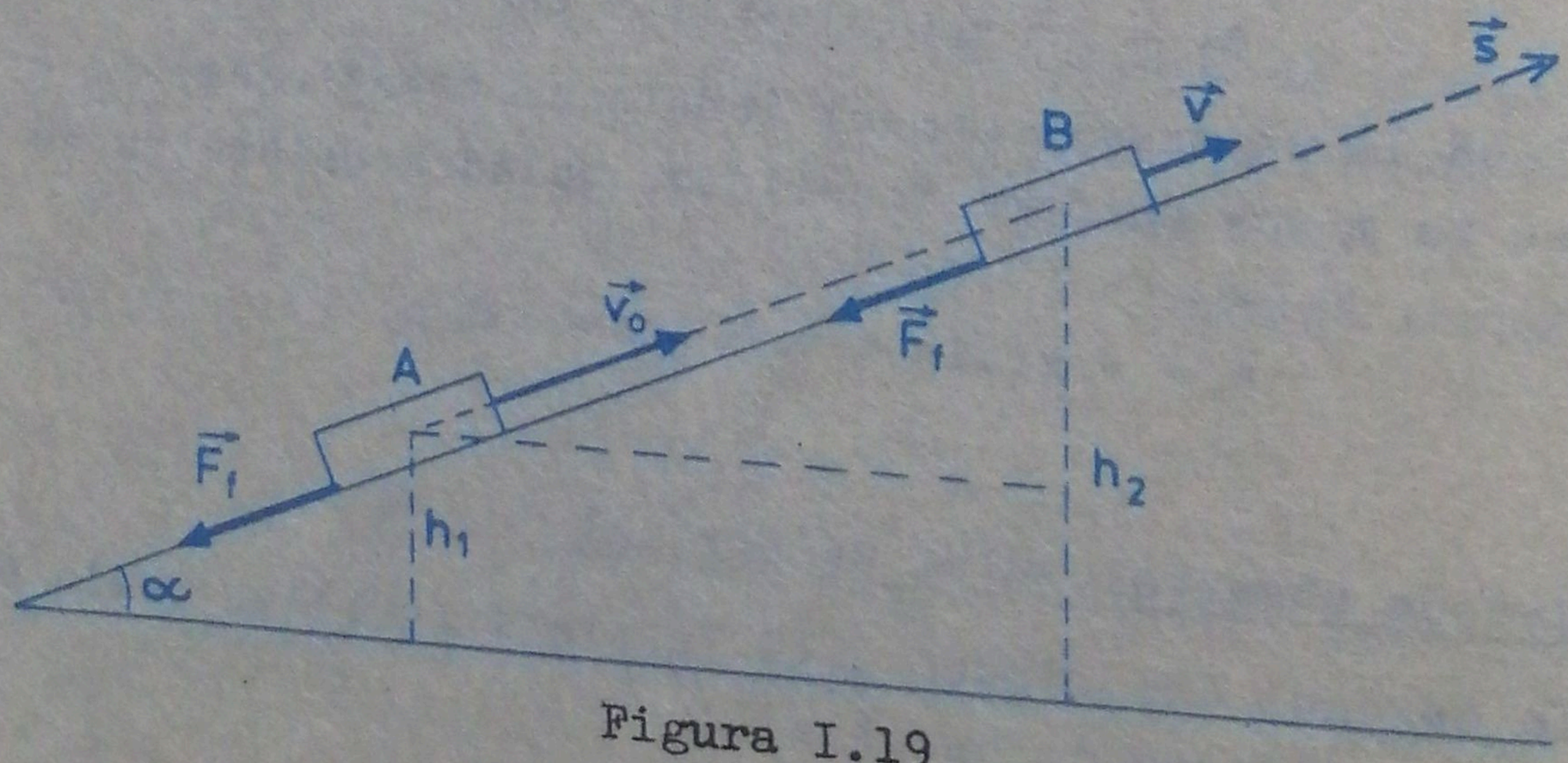


Figura I.19

$$E_{cB} - E_{cA} = L_{\vec{G}_t} + L_{\vec{F}_f} + L_{\vec{R}} + L_{\vec{G}_n};$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = \vec{G}_t \cdot \vec{s} + \vec{F}_f \cdot \vec{s} + \vec{R} \cdot \vec{s} + \vec{G}_n \cdot \vec{s};$$

$$mv^2 - mv_o^2 = 2(-G_t s - F_f s);$$

$$mv^2 - mv_o^2 = -2mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)s;$$

$$mv^2 = mv_o^2 - 2mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)s;$$

$$v^2 = v_o^2 + 2as;$$

$$a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Metoda teoremei variaţiei energiei mecanice totale

$$E_B - E_A = L_{\vec{F}_f};$$

$$E_{cB} + E_{pB} - E_{cA} - E_{pA} = \vec{F}_f \cdot \vec{s};$$

$$\frac{mv^2}{2} + mgh_2 - \frac{mv_o^2}{2} - mgh_1 = -F_f s;$$

$$v^2 = v_o^2 - 2g(h_2 - h_1) - 2\mu g\cos\alpha\ s;$$

$$v^2 = v_o^2 - 2g\sin\alpha\ s - 2\mu g\cos\alpha\ s;$$

$$v^2 = v_o^2 - 2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)s;$$

$$v^2 = v_o^2 + 2as;$$

$$a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Cazuri particulare:

1) $\mu = 0$; $a = -g\sin\alpha$;

2) $\alpha = 0$; $\mu \neq 0$; $a = -\mu g$;

3) $\alpha = 90^o$; $a = -g$.

Problema 10

De la baza unui plan înclinat este lansat spre vîrful acestuia cu viteza iniţială v_o un corp cu masa m_1. Simultan este lăsat să alunece pe acelaşi plan, plecînd din vîrful aces-

tuia, un corp cu masa m_2. Cunoscînd înclinaţia planului înclinat şi neglijînd frecările să se calculeze:

1) după cît timp de la lansare se vor întîlni cele două corpuri; se cunoaşte lungimea pantei L;

2) care trebuie să fie viteza iniţială a primului corp pentru ca după ciocnire ansamblul obţinut să ajungă la partea superioară a pantei cu o viteză egală cu jumătate din viteza iniţială a primului corp;

3) după cît timp de la ciocnire ansamblul ajunge în vîrful pantei;

4) viteza relativă a fiecărui corp în raport cu celălalt.

Rezolvare

Desenul din figura I.2o prezintă cele două corpuri atît în poziţiile iniţiale cît şi în momentul ciocnirii.

In momentul ciocnirii vitezele corpurilor sînt:

$$v_1 = v_o - gt\sin\alpha ;$$

$$v_2 = gt\sin\alpha .$$

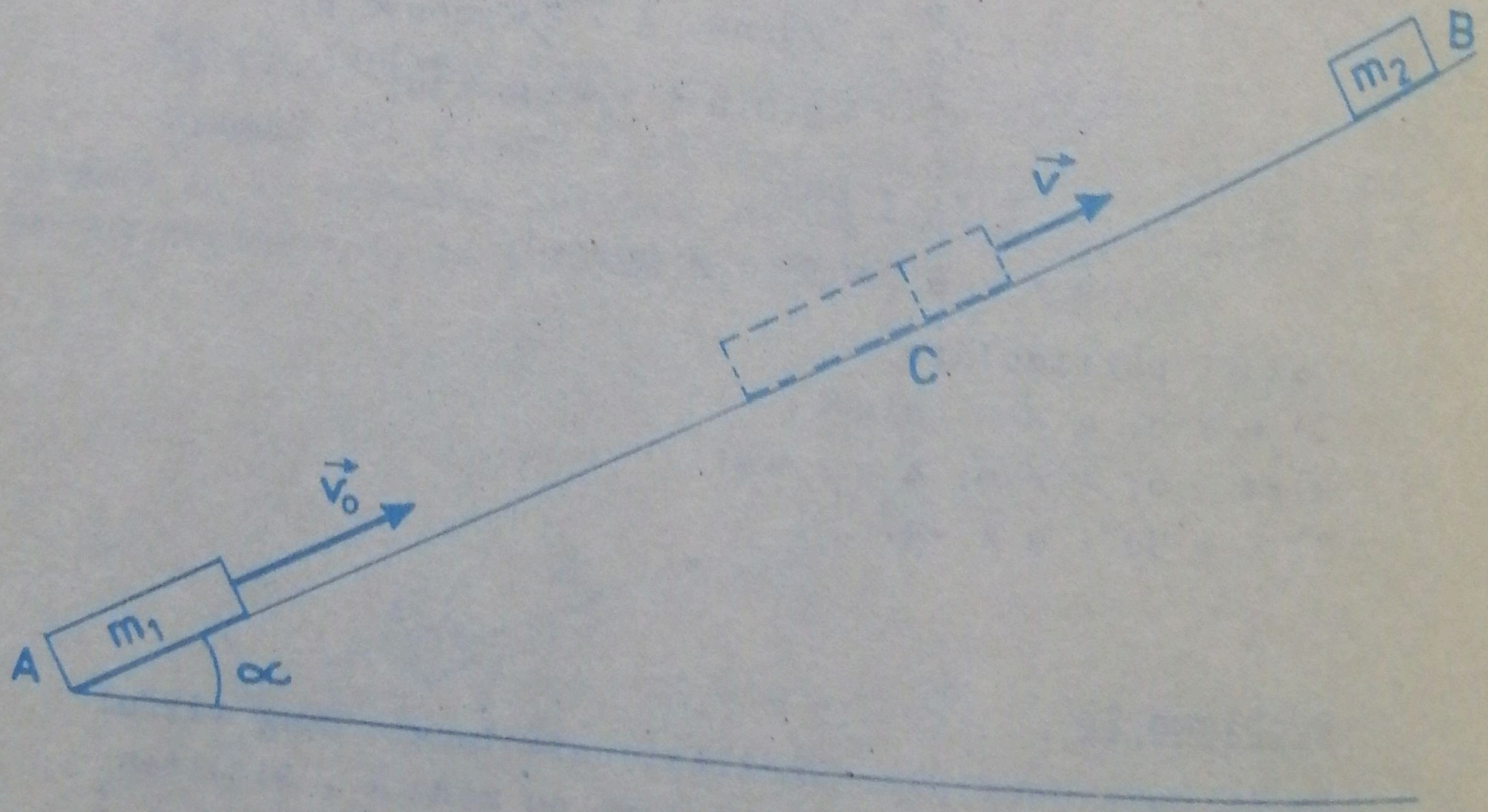


Figura I.2o

pînă în punctul C au fost parcurse distanţele:

$$s_1 = v_{ot} - \frac{gt^2 \sin\alpha}{2};$$

$$s_2 = \frac{gt^2 \sin\alpha}{2};$$

$$s_1 + s_2 = L;\ v_o t - \frac{gt^2 \sin\alpha}{2} + \frac{gt^2 \sin\alpha}{2} = L;$$

$$t = L/v_o.$$

2) $$v_1 = v_o - \frac{gL\sin\alpha}{v_o};$$

$$v_2 = \frac{gL\sin\alpha}{v_o};$$

$$s_2 = \frac{gL^2 \sin\alpha}{2v_o^2}.$$

Scriind legea conservării impulsului pentru ciocnirea plastică a corpurilor, rezultă:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v};$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v;$$

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

După ciocnire ansamblul ajunge în B cu viteza:

$$v_B = v_o/2;$$

$$v_B^2 = v^2 - 2g\sin\alpha\ s_2;$$

$$v^2 - 2g\sin\alpha\ s_2 = v_o^2/4;$$

$$\frac{(m_1 v_1 - m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} - 2g\sin\alpha\ s_2 = v_o^2/4.$$

Introducînd valorile lui v_1, v_2 şi s_2 rezultă:

$$v_o = \sqrt{\frac{8m_1(m_1 + m_2)L\sin\alpha g}{4m_1^2 - (m_1 + m_2)^2}}.$$

Pentru acceptarea rezultatului trebuie ca expresia de sub radical să fie pozitivă:

$$4m_1^2 - (m_1 + m_2)^2 > 0;$$

$$m_1 > m_2.$$

3) $$v_B = v - gt_1\sin\alpha = v_o/2;$$

$$gt_1\sin\alpha = v - v_o/2;$$

$$gt_1\sin\alpha = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} - \frac{v_o}{2};$$

$$t_1 = \frac{v_o(m_1 - m_2)}{2g(m_1 + m_2)\sin\alpha} - \frac{L}{v_o}.$$

4) $$\vec{v}_{1;2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2;\ v_{1;2}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos 180^o;$$

$$v_{1;2} = v_1 + v_2 = v_o - gt\sin\alpha + gt\sin\alpha = v_o;$$

$$\vec{v}_{2;1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1;$$

$$v_{2;1} = v_2 + v_1 = v_o;$$

$$v_{1;2} = v_{2;1};\ \vec{v}_{1;2} = -\vec{v}_{2;1}.$$

Problema 11

Un tînăr efectuează următoarea experienţă. El montează la un cîntar un bloc de lemn cu rotile, astfel încît acesta să poată coborî fără frecare pe un plan înclinat, apoi se urcă pe cîntar şi citeşte indicaţiile acestuia în timp ce coboară. Dacă tînărul cîntăreşte 80 kgf în repaus, iar în timpul coborîrii cîntarul indică 60 kgf, care este unghiul de înclinare a planului.

(R. Feynman - Fizica Modernă)

Rezolvare

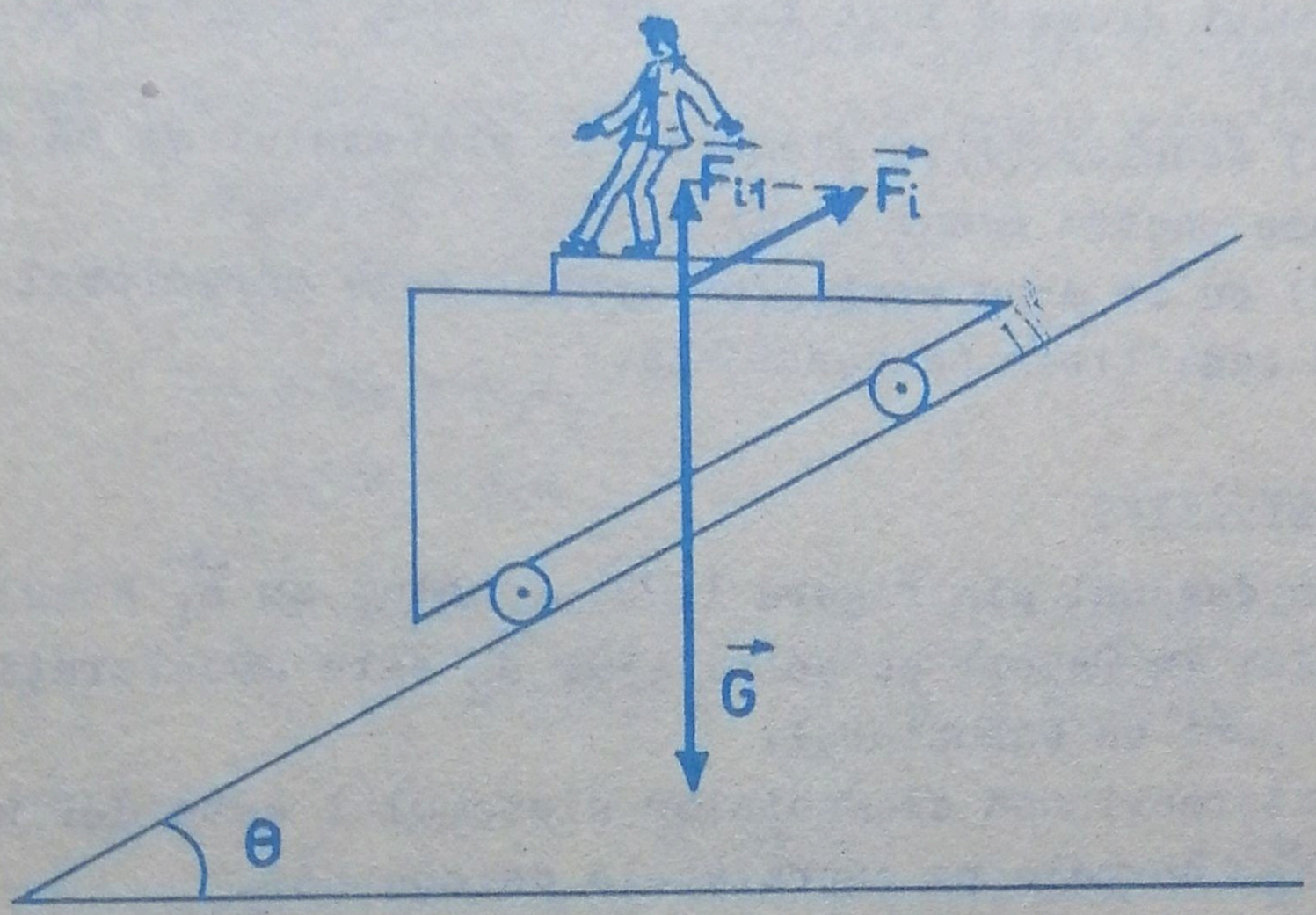


Figura I.21

Cunoscînd orientarea acceleraţiei sistemului, în desenul din figura I.21 am reprezentat şi forţa de inerţie care acţionează asupra tînărului.

Stiind că numai forţa a cărei direcţie este verticală poate fi înregistrată de cîntar, am descompus forţa de inerţie aşa cum arată desenul.

Ceea ce înregistrează cîntarul este:

$$G_{aparent} = G - F_{il};\ G_{ap} = 6o\ kgf;$$

$$G_{ap} = G - F_i \sin\theta;$$

$$G_{ap} = G - ma\sin\theta;\ a = g\sin\theta;\ m = G/g;$$

$$G_{ap} = G - G\sin^2\theta;\ G_{ap} = G\cos^2\theta;$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{G_{ap}}{G}} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \theta = 3o^{\circ}.$$

Problema 12

Pe o suprafaţă orizontală se poate deplasa fără frecare un cărucior cu masa m_1. Pe suprafaţa înclinată cu unghiul θ a căruciorului alunecă fără frecare un corp cu masa m_2. Să se determine:

1) acceleraţiile elementelor sistemului şi să se particularizeze pentru cazul $m_1 \gg m_2$;

2) cu ce acceleraţie ar trebui tras căruciorul pentru ca m_2 să cadă liber pe verticală.

Rezolvare

In desenul din figura I.22 am notat cu $\vec{a}_1$ acceleraţia căruciorului în raport cu solul, iar $\vec{a}_2$ este acceleraţia corpului în raport cu căruciorul.

Interacţiunea elementelor sistemului este definită de forţele $\vec{R}_2$, normale pe suprafeţele de contact.

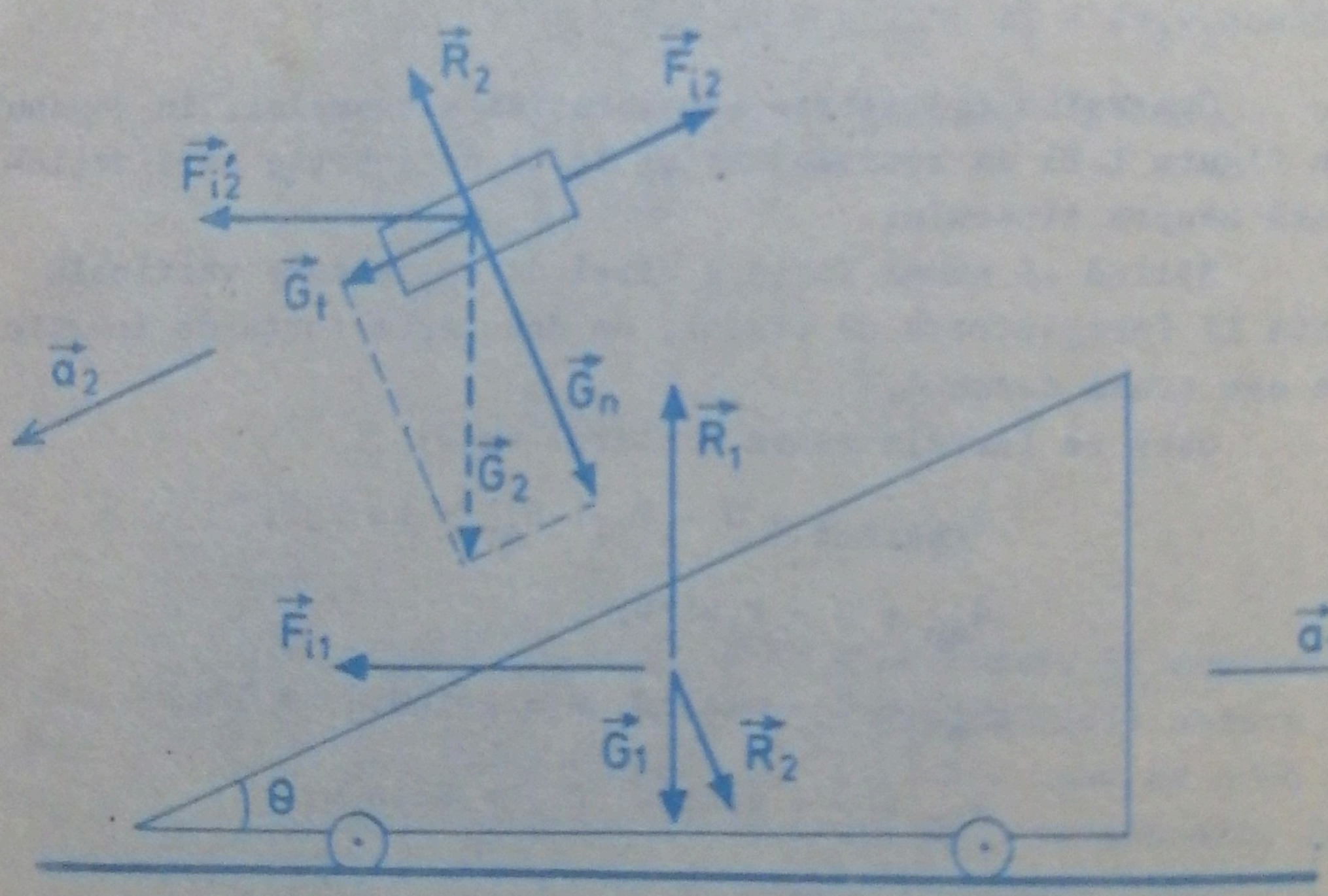


Figura I.22

Acceleraţia corpului în raport cu solul este:

$$\vec{a} = \vec{a}_2 + \vec{a}_1.$$

Aplicînd principiul lui d'Alembert pentru forţele care acţionează asupra fiecărui element al sistemului rezultă:

$$m_2 g\sin\theta + m_2 a_1 \cos\theta = m_2 a_2;$$

$$R_2 + m_2 a_1 \sin\theta = m_2 g\cos\theta;$$

$$R_2 \sin\theta = m_1 a_1;$$

$$R_2 \cos\theta + m_1 g = R_1;$$

$$a_1 = \frac{m_2 g\sin\theta\cos\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta};\quad a_2 = \frac{(m_1 + m_2)g\sin\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta};$$

$$R_1 = m_1 g\left(1 + \frac{m_2\cos^2\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta}\right);\quad R_2 = \frac{m_1 m_2 g\cos\theta}{m_1 + m_2\sin^2\theta}.$$

A particulariza aceste rezultate pentru cazul $m_1 \gg m_2$ însemnează a calcula limitele lor pentru m_1 tinzînd la infinit.

Rezultă:

$$a_1 = o;\quad a_2 = g\sin\theta;\quad R_2 = m_2 g\cos\theta.$$

3) Folosind desenul din figura I.23, rezultă:

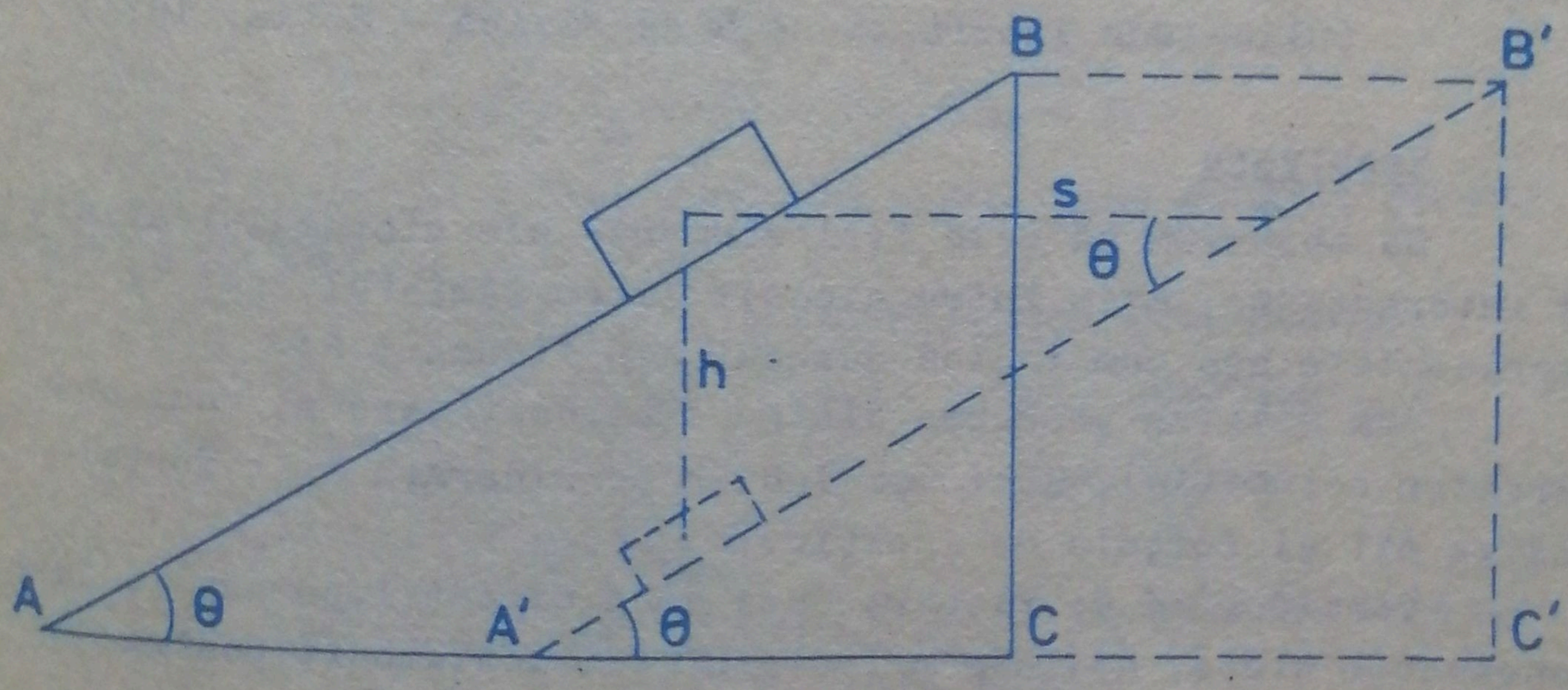


Figura I.23

$$h = \frac{gt^2}{2};\quad s = \frac{at^2}{2};$$

$$h = s\ tg\theta;$$

$$\frac{gt^2}{2} = \frac{at^2}{2}\ tg\theta;$$

$$a = g/tg\theta;$$

$$a = g\ ctg\theta.$$

Problema 13

O pană netedă de masă M are forma unei prisme cu secţiunea triunghiulară, cu unghiurile de la bază θ_1 şi θ_2. Pe prismă (pană) se află două corpuri de mase m_1 şi m_2 legate între ele printr-un fir inextensibil, care trece peste un scripete fixat pe muchia prismei (unghi diedru). Masa firului şi masa scripetelui sînt neglijabile faţă de masele m_1, m_2 şi M. Intregul sistem se află iniţial în stare de repaus. După aceea sistemul este lăsat să se mişte liber. Să se calculeze acceleraţia cu care va aluneca pana, ştiind că ea este aşezată pe un plan orizontal absolut neted. Să se exprime acceleraţiile relative ale corpurilor faţă de prismă, în funcţie de acceleraţia prismei. Ce relaţie trebuie să existe între masele m_1 şi m_2 pentru ca prisma să rămînă fixă, iar corpurile să alunece pe prismă?

(Olimpiada Internaţională de Fizică - Sofia, 1971)

Rezolvare

Să observăm că cele trei elemente ale sistemului aflate în interacţiune, atît între ele cît şi cu Pămîntul, pot fi reprezentate aşa cum indică desenul din figura I.24.

Vom rezolva problema din punctul de vedere al unui observator neinerţial, deci vom lua în considerare atît forţele active cît şi forţele de inerţie.

Considerînd de fiecare dată două direcţii perpendiculare convenabil alese, aplicăm principiul lui d'Alembert pentru fiecare element al sistemului.

Pentru corpul m_1 rezultă:

$$T + m_1 a_1 = m_1 a_2 \cos\theta_1 + m_1 g \sin\theta_1;$$

$$R_1 + m_1 a_2 \sin\theta_1 = m_1 g \cos\theta_1.$$

Pentru corpul m_2 rezultă:

$$T + m_2 a_2 \cos\theta_2 = m_2 a_1 + m_2 g \sin\theta_2;$$

$$R_2 = m_2 a_2 \sin\theta_2 + m_2 g \cos\theta_2.$$

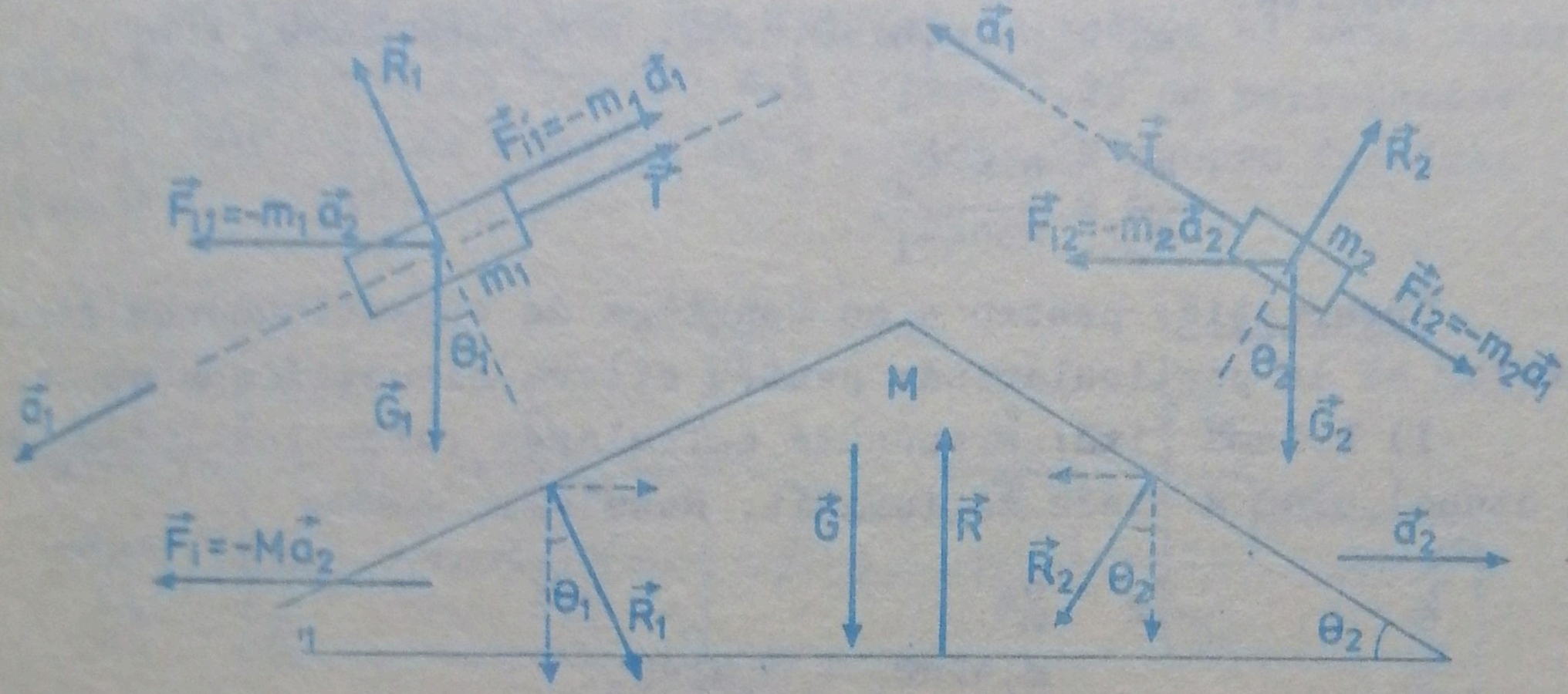


Figura I.24

Pentru corpul M rezultă:

$$Ma_2 + R_2 \sin\theta_2 = R_1 \sin\theta_1;$$

$$Mg + R_1 \cos\theta_1 + R_2 \cos\theta_2 = R.$$

Necunoscutele din sistemul celor şase ecuaţii scrise mai sus sînt:

R_1 = reacţia normală a penei asupra corpului m_1;

R_2 = reacţia normală a penei asupra corpului m_2;

R = reacţia normală a solului asupra penei;

T = tensiunea din fir;

a_1 = acceleraţia corpurilor m_1 şi m_2 faţă de prismă;

a_2 = acceleraţia prismei faţă de sol.

Rezolvînd sistemul rezultă:

$$a_2 = \frac{m_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1 - m_2 \sin\theta_2 \cos\theta_2}{M + m_1 \sin^2\theta_1 + m_2 \sin^2\theta_2} g;$$

$$a_1 = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g + \frac{m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2}{m_1 + m_2} a_2.$$

Dacă la momentul $t_o = o$ prisma este în repaus, atunci la momentul t viteza ei în raport cu solul este: $v_2 = a_2 t$.

Dacă prisma rămîne în repaus înseamnează că: $v_2 = o$.

Rezultă:

$$a_2 = o = m_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1 - m_2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 = o;$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_1}.$$

Observaţie: pentru a ne convinge de corectitudinea rezultatelor să le particularizăm pentru cîteva situaţii cunoscute.

1) Prisma fixă: presupune calcularea valorilor lui a_1 şi a_2 atunci cînd M tinde la infinit. Rezultă:

$$a_2 = o;$$

$$a_1 = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g.$$

2) $\theta_1 = \theta_2 = 90^o$. Rezultă:

$$a_2 = o;$$

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Problema 14

Trei corpuri de mase m_2, m_3, m_4 legate între ele cu fire inextensibile sînt aşezate pe suprafaţa unui plan orizontal. De corpul cu masa m_2 este legat un alt fir orizontal, trecut peste un scripete mic şi avînd suspendat la celălalt capăt un corp cu masa m_1.

1) Cunoscînd coeficientul de frecare dintre corpuri şi planul orizontal să se determine reacţiile normale ale suportu-

lui orizontal, accelerația sistemului și tensiunile din fire.

2) Cunoscînd lungimile firelor de legătură și presupunînd că acestea se rup simultan să se precizeze care corp de pe planul orizontal se va opri primul și care vor fi distanțele dintre ele în momentul opririi.

3) Ce valoare ar trebui să aibă m_2 și ce condiție trebuie să îndeplinească coeficientul de frecare pentru ca mișcarea sistemului să fie uniformă?

Rezolvare

Rezolvînd problema din punctul de vedere al unui observator neinerțial, în desenul din figura I.25 am reprezentat forțele reale și de inerție care acționează asupra fiecărui element al sistemului.

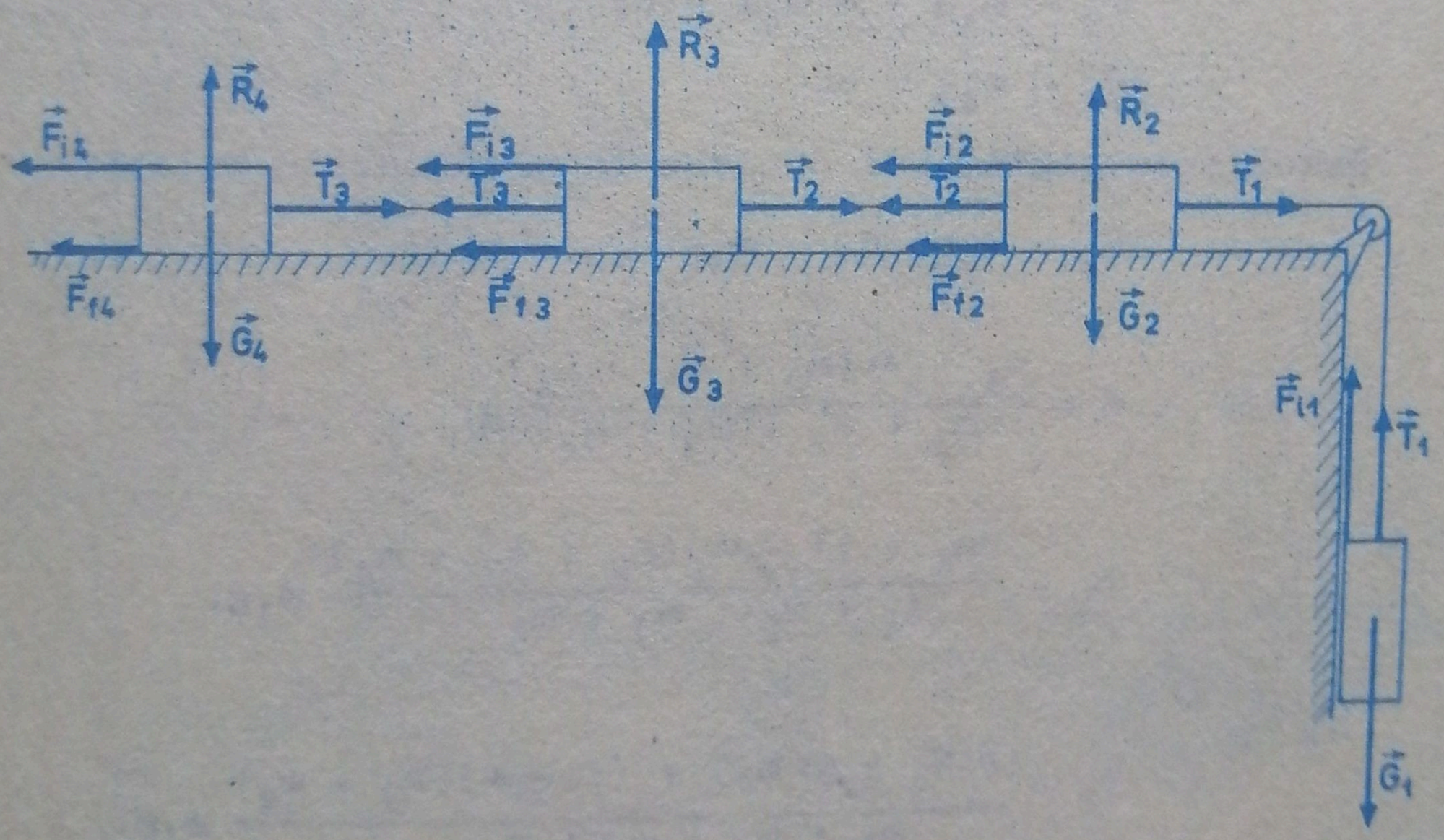


Figura I.25

Scriem ecuațiile principiului lui d'Alembert pentru fiecare element al sistemului:

$$\vec{G}_1 + \vec{F}_{i1} + \vec{T}_1 = o;$$
$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{f2} = o;$$
$$\vec{R}_2 + \vec{G}_2 = o;$$

$$\vec{T}_2 + \vec{T}_3 + \vec{F}_{i3} + \vec{F}_{f3} = o;$$
$$\vec{R}_3 + \vec{G}_3 = o;$$
$$\vec{T}_3 + \vec{F}_{i4} + \vec{F}_{f4} = o;$$
$$\vec{R}_4 + \vec{G}_4 = o.$$

Trecînd de la relaţii vectoriale la relaţii între modulele vectorilor, rezultă următorul sistem de ecuaţii:

$$m_1 g - m_1 a - T_1 = o;$$
$$T_1 - T_2 - m_2 a - \mu m_2 g = o;$$
$$R_2 - m_2 g = o;$$
$$T_2 - T_3 - m_3 a - \mu m_3 g = o;$$
$$R_3 - m_3 g = o;$$
$$T_3 - m_4 a - \mu m_4 g = o;$$
$$R_4 - m_4 g = o.$$

Rezolvarea sistemului conduce la următoarele valori:

$$R_2 = m_2 g;\ R_3 = m_3 g;\ R_4 = m_4 g;$$

$$a = \frac{m_1 - \mu(m_2 + m_3 + m_4)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} g;$$

$$T_1 = \frac{2m_1 + (1 - \mu)(m_2 + m_3 + m_4)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} m_1 g;$$

$$T_2 = \frac{2(m_1 - \mu m_2) + (1 - \mu)(m_3 + m_4)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} m_1 g;$$

$$T_3 = \frac{m_4(1 + \mu)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} m_1 g.$$

2) Dacă se rup firele de legătură, fiecare corp de pe suportul orizontal se va mişca uniform încetinit pînă la oprire. Deoarece în momentul ruperii firelor toate corpurile aveau aceeaşi viteză şi deoarece acceleraţia de frînare are aceeaşi valoare pentru toate corpurile ($-\mu g$), ele se vor opri simultan.

Distanţele dintre corpuri vor rămîne neschimbate.

3) Pentru ca mişcarea sistemului să fieuniformă trebuie ca acceleraţia acestuia să fie nulă. Rezultă:

$$m_1 - \mu(m_2 + m_3 + m_4) = 0;$$

$$m_2 = \frac{m_1 - \mu(m_3 + m_4)}{}.$$

Deoarece $m_2 > 0$, rezultă:

$$\mu < \frac{m_1}{m_3 + m_4}.$$

Problema 15

Cunoscînd masele corpurilor reprezentate în desenul din figura I. 26 să se determine acceleraţiile elementelor sistemului şi tensiunile din fire.

Rezolvare

$$\vec{G} + \vec{F}_i + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0;$$
$$\vec{T}_1 + \vec{F}_{il} + \vec{F}_{fl} = 0;$$
$$\vec{T}_2 + \vec{F}_{fl} + \vec{F}_{f2} + \vec{F}_{i2} = 0.$$

Observînd că toate elementele sistemului au aceeaşi acceleraţie, rezultă:

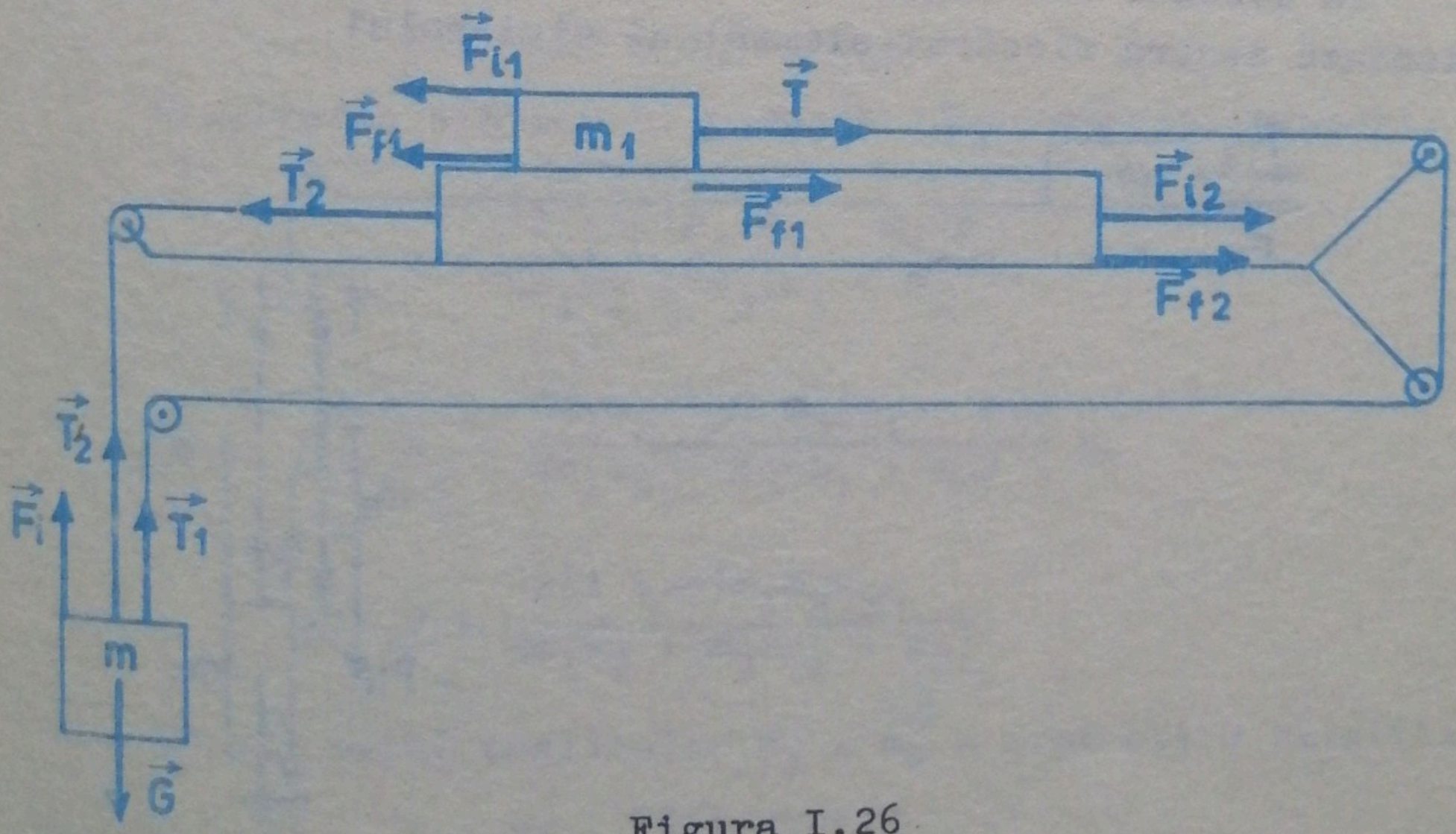


Figura I.26

$$-mg + T_1 + T_2 + ma = 0;$$

$$T_1 = m_1 a + \mu m_1 g;$$

$$T_2 = m_2 a + \mu m_1 g + \mu (m_1 + m_2).$$

Rezolvarea sistemului conduce la următoarele valori:

$$a = \frac{m - \mu(3m_1 + m_2)}{m + m_1 + m_2} g;$$

$$T_1 = \frac{2m + m_1(1 - 3\mu) + m_2(1 - \mu)}{m + m_1 + m_2} m_1 g;$$

$$T_2 = \frac{m - \mu(3m_1 + m_2)}{m + m_1 + m_2} m_2 g + \mu(2m_1 + m_2)g.$$

Problema 16

Un corp cu masa m_3 aşezat pe un plan orizontal este legat cu un fir inextensibil orizontal trecut peste un scripete mic. De celălalt capăt al firului este prinsă furca unui alt scripete foarte uşor, peste care trece un fir avînd la capete corpurile m_1 şi respectiv $m_2 > m_1$. Cunoscînd coeficientul de frecare pe planul orizontal să se calculeze acceleraţiile corpurilor şi tensiunile din fire. Caz particular= $m_1 = m_2$.

Rezolvare

In desenul din figura I.27 am reprezentat forţele care acţionează asupra fiecărui element al sistemului.

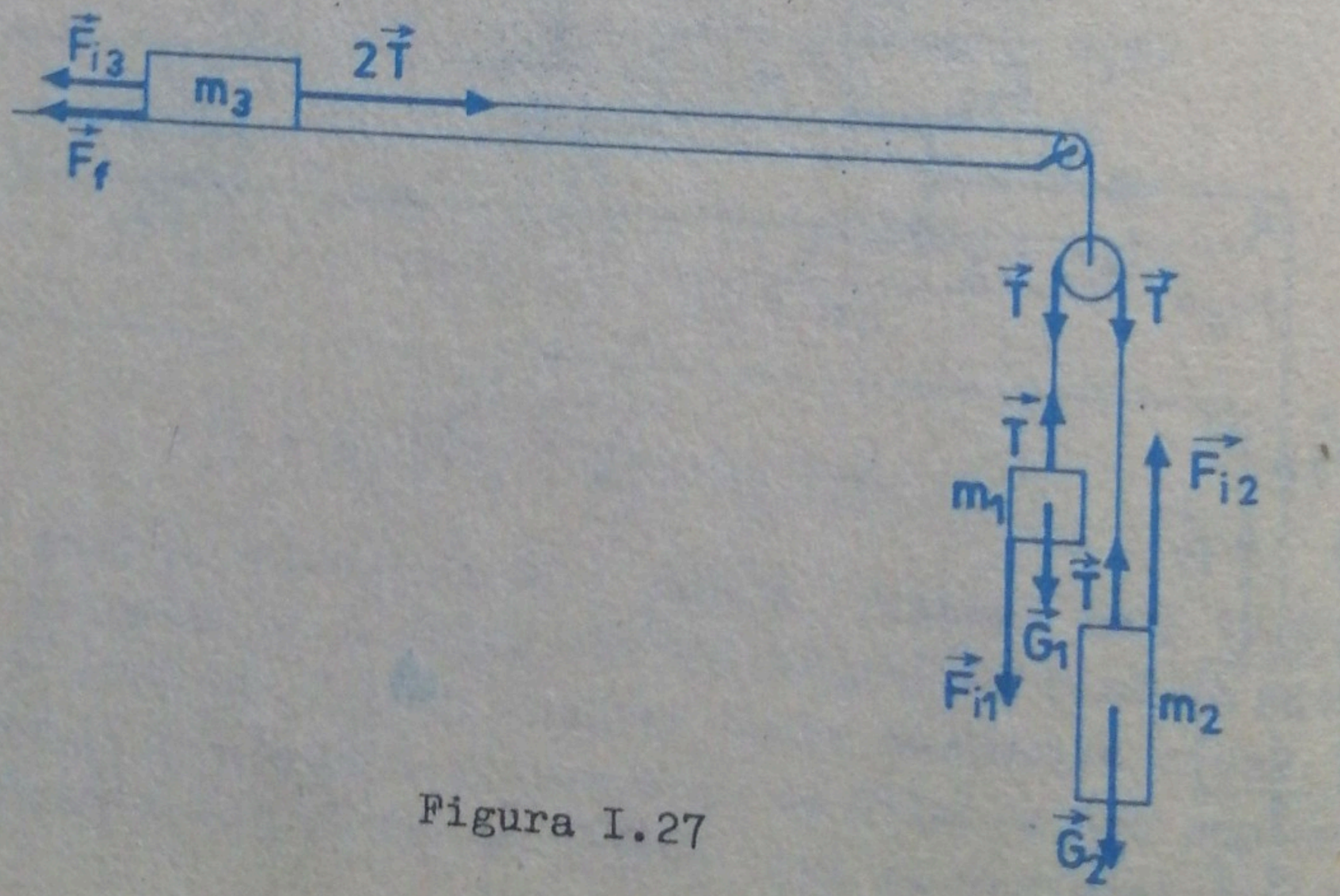


Figura I.27

Notaţii:

$\vec{a}_3$ = acceleraţia corpului m_3 şi a scripetelui mobil, faţă de sol;

$\vec{a}$ = acceleraţia corpurilor m_1 şi m_2 faţă de scripetele mobil;

$\vec{a}_1$ = acceleraţia corpului m_1 faţă de sol;

$\vec{a}_1 = \vec{a} + \vec{a}_3$;

$a_1 = a - a_3$;

$\vec{a}_2$ = acceleraţia corpului m_2 faţă de sol;

$\vec{a}_2 = \vec{a} + \vec{a}_3$;

$a_2 = a + a_3$.

Principiul lui d'Alembert scris pentru fiecare element al sistemului conduce la următorul sistem de ecuaţii:

$$2T = m_3 a_3 + \mu m_3 g;$$

$$T = m_1 a_1 + m_1 g;$$

$$T + m_2 a_2 = m_2 g.$$

Introducînd expresiile lui a_1 şi a_2 obţinem:

$$2T = m_3 a_3 + \mu m_3 g;$$

$$T = m_1 (a - a_3) + m_1 g;$$

$$T + m_2 (a + a_3) = m_2 g.$$

Rezolvarea sistemului conduce la următoarele valori:

$$a = \frac{(1 + \mu) m_3 (m_2 - m_1) g}{4 m_1 m_2 + m_3 (m_1 + m_2)};$$

$$a_3 = \frac{4 m_1 m_2 - \mu m_3 (m_1 + m_2)}{4 m_1 m_2 + m_3 (m_1 + m_2)} g;$$

$$T = \frac{2(1 + \mu) m_1 m_2 m_3 g}{4 m_1 m_2 + m_3 (m_1 + m_2)}.$$

Pentru cazul particular $m_1 = m_2 = m$ se obţin valorile:

$$a = 0;$$

$$a_3 = \frac{2m - \mu m_3}{2m + m_3} g;$$

$$T = \frac{(1 + \mu) m m_3 g}{2m + m_3}.$$

Problema 17

O sanie de masă m_1 este trasă cu o forţă orizontală F. Pe sanie este aşezat un corp de masă m_2 care poate aluneca pe platforma orizontală a saniei cu coeficientul de frecare la alunecare μ. De corpul m_2 este legată printr-un fir orizontal o altă sanie de masă m_3. Intre sănii şi zăpadă frecarea este neglijabilă. Să se afle:

1) acceleraţia sistemului şi tensiunea din fir în cazul nealunecării corpului 2 pe sania 1;

2) condiţia de nealunecare a corpului m_2 pe sania m_1;

3) acceleraţia corpurilor şi tensiunea din fir în cazul alunecării corpului m_2 pe sania m_1.

(Concursul de fizică, Etapa judeţeană, 1972)

Rezolvare

In raport cu un sistem de referinţă neinerţial, în desenul din figura I.28 au fost reprezentate forţele reale şi de inerţie care acţionează asupra fiecărui element al sistemului.

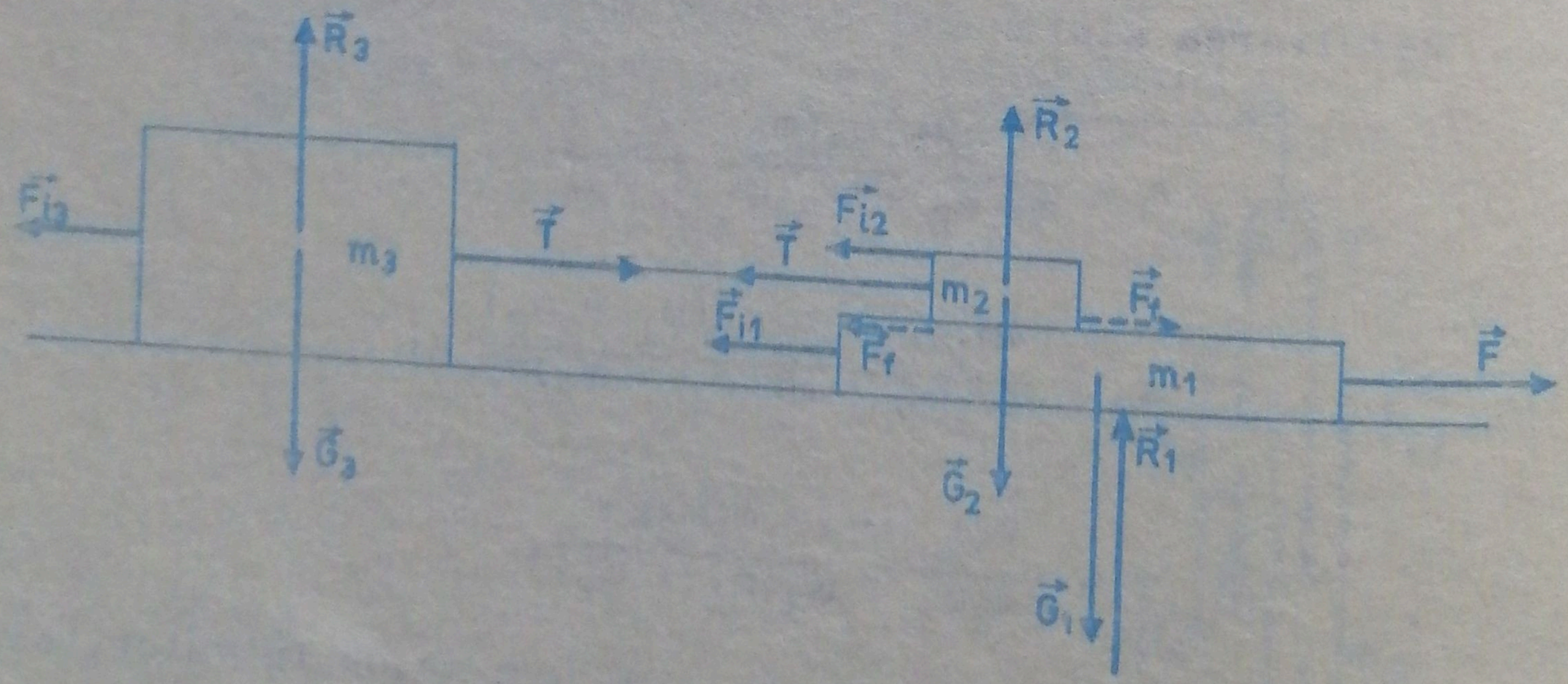


Figura I.28

1) $\vec{R}_1 + \vec{G}_1 + \vec{G}_2 = o;$

$\vec{R}_2 + \vec{G}_2 = o,$

$\vec{R}_3 + \vec{G}_3 = o;$

$\vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} = o;$

$\vec{T} + \vec{F}_{i3} = o;$

$R_1 = (m_1 + m_2)g;\ R_2 = m_2g;\ R_3 = m_3g;$

$T - m_3a = o;$

$F - T - m_1a - m_2a = o;$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$T = \frac{Fm_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

2) Condiţia de nealunecare a corpului m_2 pe suprafaţa corpului m_1 presupune să avem asigurată relaţia:

$$F_f > T + F_{i2};$$

$$\mu m_2g > \frac{F(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$\mu > \frac{F(m_2 + m_3)}{m_2g(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

3) In cazul alunecării corpului m_2 pe suprafaţa saniei m_1 înseamnează că sistemul $(m_2;\ m_3)$ va avea altă acceleraţie (a_2), iar sania m_1 va avea acceleraţia a_1.

$\vec{F} + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_f = 0;$

$\vec{F}_f + \vec{T} + \vec{F}_{i2} = o;$

$\vec{T} + \vec{F}_{i3} = o;$

$F - m_1a_1 - \mu m_2g = o;$

$\mu m_2g - T - m_2a_2 = o;$

$T - m_3a_2 = o.$

Rezolvarea sistemului conduce la valorile:

$$a_1 = \frac{F - \mu m_2 g}{m_1}; \quad a_2 = \frac{\mu m_2 g}{m_2 + m_3}; \quad T = \frac{\mu m_2 m_3 g}{m_2 + m_3}.$$

Problema 18

Fie sistemul mecanic reprezentat în desenul din figura I.29, care constă din cărucioarele A, B, C avînd masele respectiv m_1 = 300 g, m_2 = 200 g, m_3 = 1500 g. O forţă orizontală este aplicată căruciorului C şi are mărimea astfel calculată încît cărucioarele A şi B rămîn în repaus relativ faţă de căruciorul C.

1) Să se calculeze tensiunea firului întins între cărucioarele A şi B.

2) Să se determine mărimea forţei $\vec{F}$.

3) Presupunînd căruciorul C imobil să se calculeze acceleraţia cărucioarelor şi tensiunea firului.

(Concurs internaţional, Brno, 1969)

Rezolvare

In desenul din figura I.29 au fost reprezentate forţele reale şi forţele de inerţie care acţionează asupra fiecărui element al sistemului.

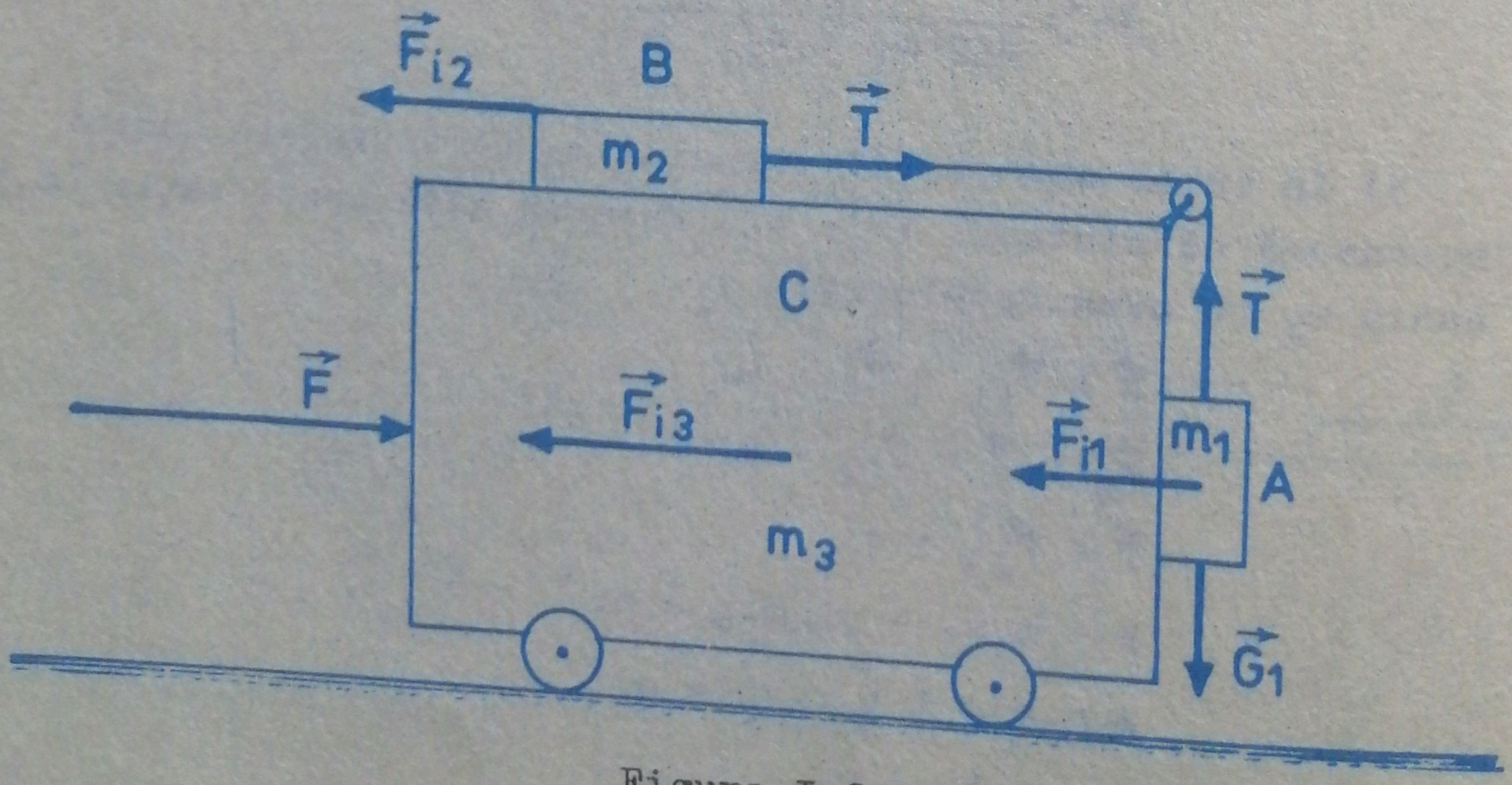


Figura I.29

Căruciorele A şi B fiind în repaus relativ faţă de C se pot scrie următoarele relaţii:

$$\vec{T} + \vec{G}_1 = o;$$

$$\vec{T} + \vec{F}_{12} = o;$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{11} + \vec{F}_{13} = o;$$

$$T - m_1 g = o;$$

$$T - m_2 a = o;$$

$$F - m_1 a - m_2 a - m_3 a = o;$$

$$T = m_1 g = 3 \text{ N}.$$

2) $$a = m_1 g / m_2 = 15 \text{ m/s}^2.$$

$$F = (m_1 + m_2 + m_3) \frac{m_1}{m_2} g = 3o \text{ N}.$$

3) Cînd căruciorul C este imobil, avem:

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g = 6 \text{ m/s}^2;$$

$$T = m_2 a = 1,2 \text{ N}.$$

Problema 19

Pe o suprafaţă orizontală lucie se poate deplasa fără frecare o scîndură rectangulară, suficient de lungă, de masă M = 1 kg. Un bloc care are fixat pe el un motor poate aluneca cu frecare pe suprafaţa superioară a scîndurii. Extremitatea anterioară a blocului se află la distanţa L = 5o cm de extremitatea anterioară a scîndurii, în momentul cînd scîndura este lăsată liberă. Coeficientul de frecare este μ = o,o2, iar masa căruciorului împreună cu motorul m = loo g. Motorul fixat pe bloc înfăşoară pe arborele său un fir cu viteza constantă v_o = lo cm/s.

In primul caz cealaltă extremitate a firului este fixată de un suport imobil destul de îndepărtat, exterior scîndurii; în al doilea caz cealaltă extremitate a firului este fixată de un suport solidar scu scîndura.

Menţinînd scîndura M imobilă se lasă blocului m posibilitatea de a se deplasa cu viteza v_o, după care se eliberează şi scîndura.

Determinaţi în cele două cazuri felul mişcării şi viteza pentru scîndură şi bloc, în cazul cînd scîndura este lăsată liberă.

In cele două cazuri trebuie să se determine timpul necesar pentru ca blocul să ajungă la marginea anterioară a scîndurii

(Concurs internaţional, Moscova, 197o)

Rezolvare

Cazul 1

Dispoziţia elementelor sistemului este reprezentată în desenul din figura I.3o.

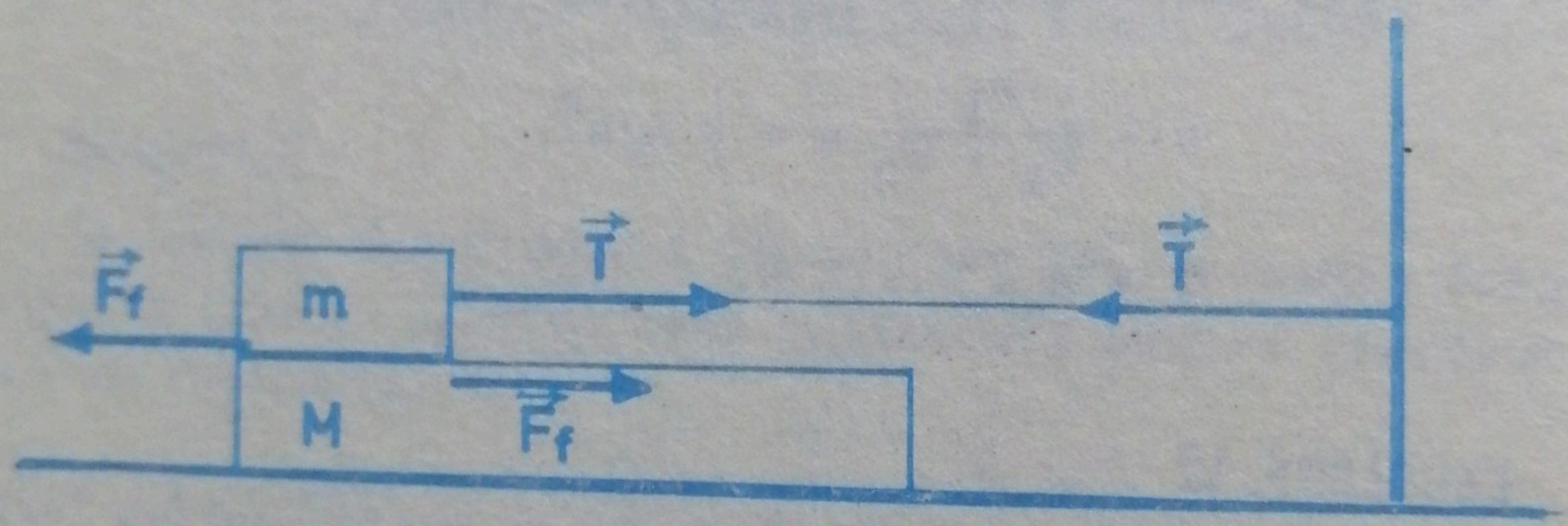


Figura I.3o

Asupra scîndurii M acţionează forţa de frecare $\vec{F}_f$; ea îi va imprima o mişcare uniform accelerată, cu acceleraţia a_1.

$$F_f = Ma_1;\ F_f = \mu mg;$$

$$a_1 = \mu mg/M = o,o2\ m/s^2.$$

Notaţii:

v_{bfp} = viteza blocului faţă de pămînt = v_o;

v_{bfs} = viteza blocului faţă de scîndură = v_2;

v_{sfp} = viteza scîndurii faţă de pămînt = v_1.

Ecuaţia vitezei scîndurii va fi:

$v_1 = \mu \frac{m}{M} g t$; $v_1 = a_1 t$; $v_1 = 0{,}02\ t$.

$\vec{v}_{bfp} = \vec{v}_{bfs} + \vec{v}_{sfp}$;

$\vec{v}_o = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$;

$v_o = v_2 + v_1$;

$v_2 = v_o - v_1$;

$$v_2 = v_o - \mu \frac{m}{M} g t = 0{,}1 - 0{,}02\ t.$$

Se observă că blocul are faţă de scîndură o mişcare rectilinie uniform încetinită pînă la oprire.

Ecuaţia lui v_2 este de forma:

$$v_2 = v_o + a_2 t.$$

Prin identificare găsim valoarea:

$$a_2 = -\mu \frac{m}{M} g = -a_1 = -0{,}02\ m/s^2.$$

Pentru a găsi timpul după care se opreşte blocul vom impune condiţia ca v_2 să se anuleze. Rezultă:

$$0 = v_o - \mu \frac{m}{M} g t_o;$$

$$t_o = \frac{v_o M}{\mu m g} = 5\ s.$$

Spaţiul parcurs de bloc pe suprafaţa scîndurii pînă la oprire se calculează astfel:

$$s_{max} = -v_o^2 / 2a = 25\ cm.$$

Deoarece valoarea calculată pentru s_{max} este mai mică decît lungimea scîndurii înseamnă că blocul nu va putea părăsi suprafaţa scîndurii.

După ce blocul m s-a oprit pe suprafaţa scîndurii M, între m şi M nu mai este mişcare relativă. Deoarece între M şi sol nu este frecare sistemul va continua să se apropie de suportul imobil cu o viteză egală cu viteza scîndurii în momentul opririi blocului m:

$$v_1 = 0{,}02 \frac{m}{s^2}\ 5\ s = 0{,}1\ m/s = v_o.$$

Se observă că în momentul opririi blocului pe suprafaţa scîndurii, viteza scîndurii a ajuns egală cu viteza de înfăşurare a firului pe arborele motorului.

Cazul 2

Elementele sistemului sînt reprezentate în desenul din figura I.31.

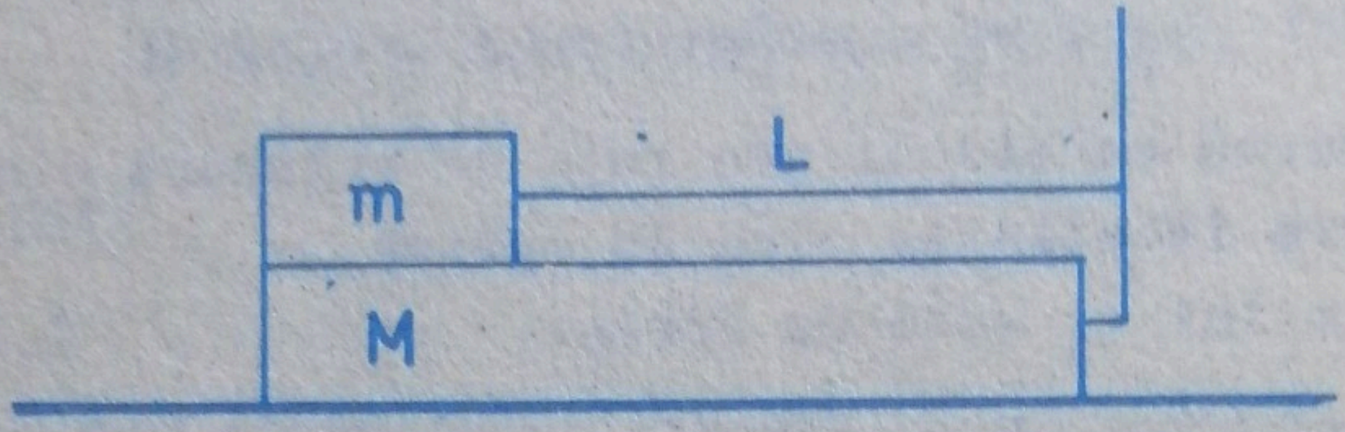


Figura I.31

Deoarece viteza de înfăşurare a firului pe arborele motorului este constantă (v_o), mişcarea blocului în raport cu scîndura este uniformă. Pe direcţie orizontală, asupra blocului acţionează forţele $\vec{F}_f$ şi $\vec{T}$, a căror rezultantă este nulă. Ca urmare mişcarea blocului în raport cu solul este uniformă, cu viteza v_1 = constant.

Pe direcţie orizontală, asupra scîndurii acţionează forţele: $(-\vec{F}_f)$ şi $(-\vec{T})$, a căror rezultantă este evident nulă. Ca urmare scîndura va rămîne în continuare în repaus, deoarece la momentul iniţial ea se afla în repaus. Deci: $v_2 = o$. Rezultă că viteza blocului în raport cu solul este:

$$v_1 = v_o + v_2;$$

$$v_1 = v_o.$$

In mişcarea sa uniformă blocul va părăsi suprafaţa scîndurii după timpul:

$$t = L/v_o = 5 \text{ s}.$$

La acelaşi rezultat se poate ajunge şi pe baza următorului raţionament.

In momentul eliberării blocului impulsul sistemului bloc - scîndură este: $m\vec{v}_o$. In acest moment $\vec{v}_o$ reprezintă viteza blocului atît în raport cu scîndura, cît şi în raport cu solul.

Viteza centrului de masă al sistemului, corespunzător aceluiaşi moment este:

$$v_{CM;o} = \frac{mv_o}{m + M}.$$

După eliberarea scîndurii, la un anumit moment, impulsul sistemului este:

$$m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2,$$

în care $\vec{v}_1$ este viteza blocului, iar $\vec{v}_2$ este viteza scîndurii în raport cu solul.

Deoarece pe direcţie orizontală sistemul este izolat de exterior, impulsul acestuia trebuie să se conserve, adică:

$$m\vec{v}_o = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2;$$

$$mv_o = mv_1 + Mv_2,$$

iar centrul de masă al sistemului trebuie să aibă o mişcare rectilinie uniformă, cu viteza:

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + Mv_2}{m + M} = v_{CM;o}.$$

Din ecuaţiile:

$$v_1 = v_o + v_2;$$

$$mv_o = mv_1 + Mv_2,$$

rezultă:

$$v_1 = v_o;\ v_2 = o.$$

Problema 2o

Pe cele două maluri ale unui rîu cu lăţimea d, se află faţă în faţă două bărci, iar în fiecare barcă se află cîte un om, trăgînd unul de celălalt printr-o frînghie, inextensibilă, foarte uşoară, pe care a fost intercalat un dinamometru.

1) Cunoscînd masa totală a fiecărei bărci, viteza apei rîului (presupusă constantă pe toată lăţimea rîului) şi indicaţia dinamometrului, să se determine după cît timp şi unde se vor întîlni bărcile.

2) Să se studieze mişcarea centrului de masă al sistemului

C-da 69 coala 5

Rezolvare

Indicaţia dinamometrului reprezintă tensiunea din sfoară (T). Rezultă:

$$\vec{a}_1 = \vec{T}/m_1;\ a_1 = T/m_1;$$

$$\vec{a}_2 = -\vec{T}/m_2;\ a_2 = T/m_2;$$

$$a_2 = \frac{m_1}{m_2} a_1.$$

Mişcarea fiecărei bărci poate fi descompusă în două mişcări:

- o mişcare uniform accelerată în lungul axei ox, orientată perpendicular pe malurile rîului;
- o mişcare uniformă în lungul axei oy, orientată în lungul cursului rîului;

$$x_1 = a_1 t^2/2;\ x_2 = d - a_2 t^2/2;$$

$$y_1 = y_2 = vt;$$

v = viteza apei rîului în raport cu malurile.

Din condiţia de întîlnire a bărcilor rezultă:

$$x_1 = x_2;$$

$$a_1 t^2/2 + a_2 t^2/2 = d;$$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_1 + a_2}};$$

$$t = \sqrt{\frac{2dm_1m_2}{T(m_1 + m_2)}};$$

$$x_1 = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2} = x_2.$$

2) $x_{CM} \equiv x_1 = \text{constant};$

$$y_{CM} = vt.$$

Problema 21

In planul orizontal xoy se dă un cadru dreptunghiular

ale cărui laturi au ecuaţiile:

$x_1 = 5$ m; $y_1 = 10$ m; $x_2 = -5$ m; $y_2 = -10$ m.

La momentul $t = 0$ un mobil trece prin origine, în mişcare rectilinie uniformă, viteza sa avînd componentele:

$v_x = 1$ m/s; $v_y = \sqrt{2}$ m/s.

Să se determine coordonatele de poziţie ale mobilului la momentul $t = 100$ s, ştiind că ciocnirea cu fiecare latură a cadrului este perfect elastică, iar frecările se neglijează.

Rezolvare

In desenul din figura I.32 este prezentată poziţia iniţială a mobilului.

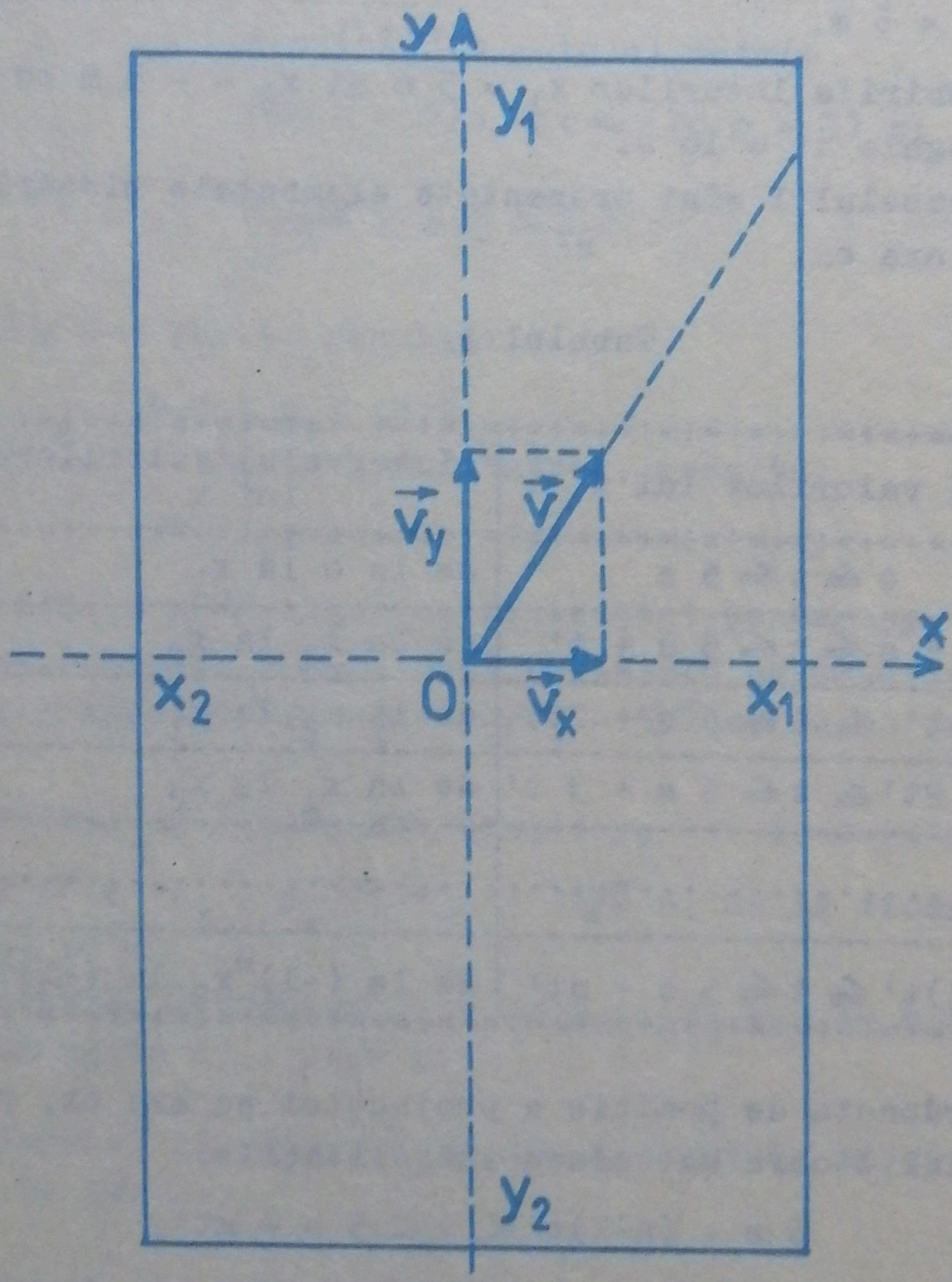


Figura I.32

Cînd mobilul întîlneşte o latură a cadrului, proiecţia vitezei paralelă cu latura respectivă îşi păstrează şi valoarea şi sensul, în timp ce proiecţia vitezei perpendiculară pe latura respectivă îşi păstrează valoarea, schimbîndu-şi sensul.

Mişcarea mobilului în planul xoy se reduce la mişcările proiecţiilor mobilului pe cele două axe.

Vom studia mai întîi mişcarea proiecţiei pe axa ox.

Prima ciocnire a mobilului cu latura de ecuaţie $x_1 = 5$ m se realizează după timpul $t_1 = x_1/v_x = 5$ s, de la începerea mişcării.

Ciocnirea cu latura de ecuaţie $x_2 = -5$ m se va realiza după timpul $t' = (x_2 - x_1)/(-v_x) = 10$ s, de la ciocnirea laturii $x_1 = 5$ m.

Ciocnirile laturilor $x_1 = 5$ m şi $x_2 = -5$ m se succed la intervale egale $t' = 10$ s.

In tabelul I sînt prezentate elementele mişcării proiecţiei pe axa ox.

Tabelul I

Intervalul valorilor lui t	Intervalul valorilor lui x	Viteza proiecţiei pe axa ox
$0 \leqslant t \leqslant 5$ s	de la 0 la x_1	v_x
$5 \text{ s} \leqslant t \leqslant 5 \text{ s} + t'$	de la x_1 la x_2	$-v_x$
$5 \text{ s} + t' \leqslant t \leqslant 5 \text{ s} + 2t'$	de la x_2 la x_1	v_x
$5 \text{ s} + 2t' \leqslant t \leqslant 5 \text{ s} + 3t'$	de la x_1 la x_2	$-v_x$
.....	.....	.....
$5 \text{ s} + (n-1)t' \leqslant t \leqslant 5 \text{ s} + nt'$	de la $(-1)^n x_2$ la $(-1)^n x_1$	$(-1)^n v_x$

Coordonata de poziţie a proiecţiei pe axa ox, pentru o valoare a lui t care satisface inegalităţile:

$$5 \text{ s} + (n-1)t' < t < 5 \text{ s} + nt',$$

reprezintă suma algebrică a distanţelor parcurse de proiecţie în timpul t, în ambele sensuri ale axei ox. Rezultă:

$$x = (-1)^n v_x t + k,$$

unde valoarea constantei k se determină din condiţiile:

$$t = 5\ s + nt';$$

$$x = (-1)^n x_1;$$

$$(-1)^n x_1 = (-1)^n v_x(5\ s + nt') + k;$$

$$k = (-1)^n\{x_1 - v_x(5\ s + nt')\};$$

$$x = (-1)^n\{x_1 + v_x(t - 5\ s - nt')\};$$

$$x = (-1)^n(t - 10\ n)\ metri;$$

$$(10\ n - 5)s < t < (10\ n + 5)\ s;$$

$$\frac{t - 5}{10} < n < \frac{t + 5}{10}.$$

Pentru t = 100 s, rezultă:

$$9{,}5 < n < 10{,}5.$$

Deoarece n este un număr întreg, rezultă:

$$n = 10;\ x = 0.$$

Vom studia acum mişcarea proiecţiei pe axa oy.

Prima ciocnire a mobilului cu latura de ecuaţie $y_1 = 10$ m se realizează după timpul $t_1' = y_1/v_y = 5\sqrt{2}$ s, de la începerea mişcării.

Ciocnirea cu latura de ecuaţie $y_2 = -10$ m se va realiza după timpul $T'' = (y_2 - y_1)/(-v_y) = 10\sqrt{2}$ s, de la ciocnirea laturii $y_1 = 10$ m.

Ciocnirile laturilor $y_1 = 10$ m şi $y_2 = -10$ m se succed la intervale egale $t'' = 10\sqrt{2}$ s.

In tabelul II sînt prezentate elementele mişcării proiecţiei pe axa oy.

Tabelul II

Intervalul valorilor lui t	Intervalul valorilor lui y	Viteza proiecţiei pe axa oy
$o \leq t \leq 5\sqrt{2}$ s	de la o la y_1	v_y
$5\sqrt{2}$ s $\leq t \leq (5\sqrt{2} + t")$ s	de la y_1 la y_2	$- v_y$
$(5\sqrt{2} + t")$ s $\leq t \leq (5\sqrt{2} + 2t")$ s	de la y_2 la y_1	v_y
$(5\sqrt{2} + 2t")$ s $\leq t \leq (5\sqrt{2} + 3t")$ s	de la y_1 la y_2	$- v_y$
.....	.....	.....
$\{5\sqrt{2} + (n-1)t"\}$ s $\leq t \leq \{5\sqrt{2} + nt"\}$ s	de la $(-1)^n y_2$ la $(-1)^n y_1$	$(-1)^n v_y$

Coordonata de poziţie a proiecţiei pe axa oy, pentru o valoare a lui t care satisface inegalităţile:

$$\{5\sqrt{2} + (n-1)t"\}\ s < t < (5\sqrt{2} + nt")\ s,$$

reprezintă suma algebrică a distanţelor parcurse de proiecţie în timpul t, în ambele sensuri ale axei oy.

Rezultă:

$$y = (-1)^n v_y t + k,$$

unde valoarea constantei k se determină din condiţiile:

$t = 5\sqrt{2}$ s + nt";

$y = (-1)^n y_1$;

$y = (-1)^n (t\sqrt{2} - 2o\ n)$ metri;

$\{5\sqrt{2} + (n-1)1o\sqrt{2}\}$ s < t < ($\{5\sqrt{2} + n1o\sqrt{2}\}$ s;

$$\frac{t - 5\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} < n < \frac{t + 5\sqrt{2}}{10\sqrt{2}}.$$

Pentru t = 100 s, rezultă:

$$n = 7;\ y = 20(7 - 5\sqrt{2})\ m.$$

Problema 22

De talerul unei balanţe cu braţe egale este prins un scripete fix, prin şanţul căruia trece un fir avînd la capete două corpuri de mase m_1 şi respectiv m_2. Ce masă trebuie pusă pe celălalt taler al balanţei pentru ca pîrghia acesteia să rămînă orizontală? Aplicaţie numerică: $m_1 = 150\ g$; $m_2 = 50\ g$.

Rezolvare

In desenul din figura I.33 sînt reprezentate forţele care acţionează asupra elementelor sistemului.

Condiţia de echilibru a balanţei este dată de egalitatea momentelor forţelor care acţionează la capetele pîrghiei:

$$2T\,\frac{L}{2} = G\,\frac{L}{2};$$

$$G = 2T.$$

Scriind principiul lui d'Alembert, rezultă:

$$\vec{G}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{i1} = 0;$$
$$\vec{G}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{i2} = 0;$$
$$T = m_1(g - a);$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g;$$

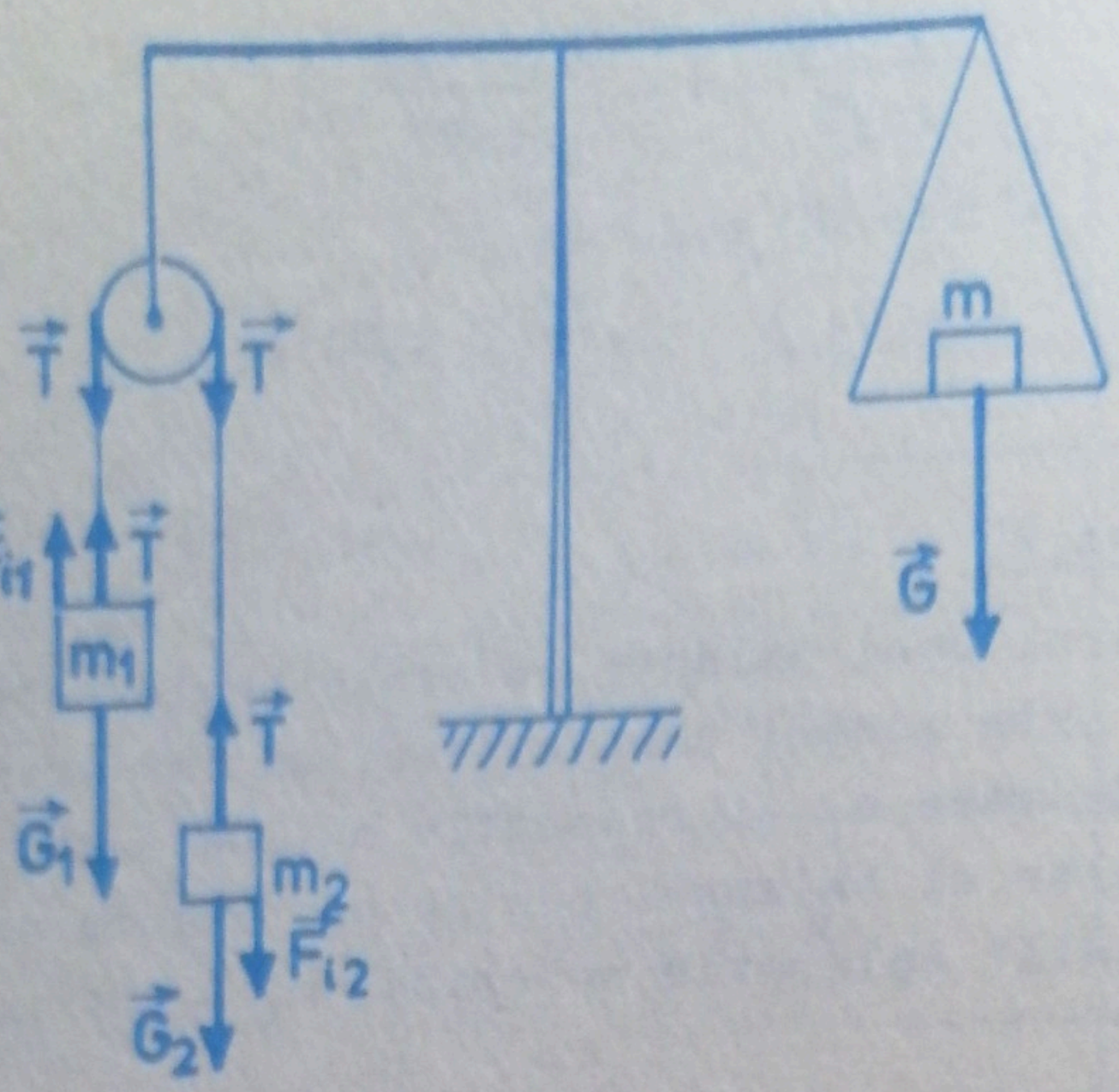


Figura I.33

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2};$$

$$G = mg;$$

$$m = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 150 \text{ g}.$$

Problema 23

O bară omogenă AOB cu greutatea G, îndoită în unghi drept, cu laturile egale este articulată în O, fiind suspendată în plan vertical.

1) Ce greutate ar trebui adăugată în capătul B pentru ca braţul OA să fie orizontal?

2) Ce forţă trebuie aplicată în B, după direcţia cea mai favorabilă, pentru a asigura poziţia orizontală a braţului OA?

3) Se suspendă pîrghia în A; să se stabilească poziţia de echilibru a pîrghiei.

4) Capetele A şi B se leagă cu fire paralele trecute peste cîte un scripete fix. Cu ce forţe trebuie acţionat la capetele firelor pentru ca pîrghia să rămînă în echilibru cu braţul OA orizontal?

5) Pe latura OA se aşează un corp în aşa fel încît aceasta rămîne orizontală. Care este masa corpului adăugat, dacă sistemul capătă acceleraţia g/2?

6) După n secunde corpul adăugat este ridicat. Unde se va opri pîrghia dacă se neglijează frecările?

Rezolvare

1) Forţele care acţionează asupra pîrghiei sînt reprezentate în desenul din figura I.34. In desen nu este reprezentată reacţia suportului asupra pîrghiei în punctul de suspensie.

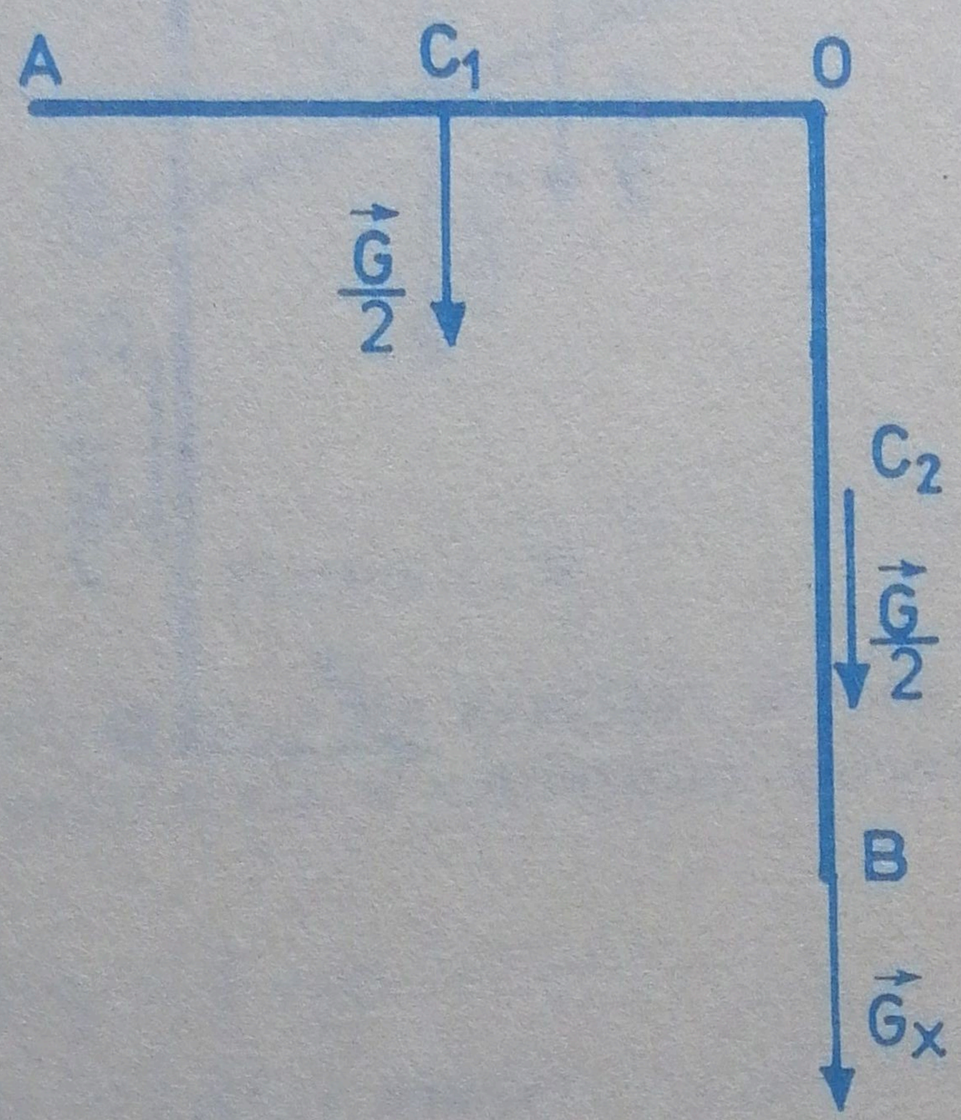


Figura I.34

Condiţia de echilibru a pîrghiei se traduce prin a scrie că faţă de punctul O suma vectorială a momentelor forţelor care acţionează asupra pîrghiei este zero.

Această condiţie poate fi scrisă scalar admiţînd că suma modulelor momentelor forţelor care au tendinţa de a roti pîrghia într-un sens este egală cu suma modulelor momentelor forţelor care au tendinţa de a roti pîrghia în sens invers.

Rezultă:

$$\frac{G}{2} OC_1 = \frac{G}{2} o + G_x o + R o;$$

G_x = infinit.

2) Direcţia cea mai favorabilă este aceea pentru care momentul forţei F este maxim. Această condiţie este îndeplinită atunci cînd forţa este perpendiculară pe OB, aşa cum indică desenul din figura I.35.

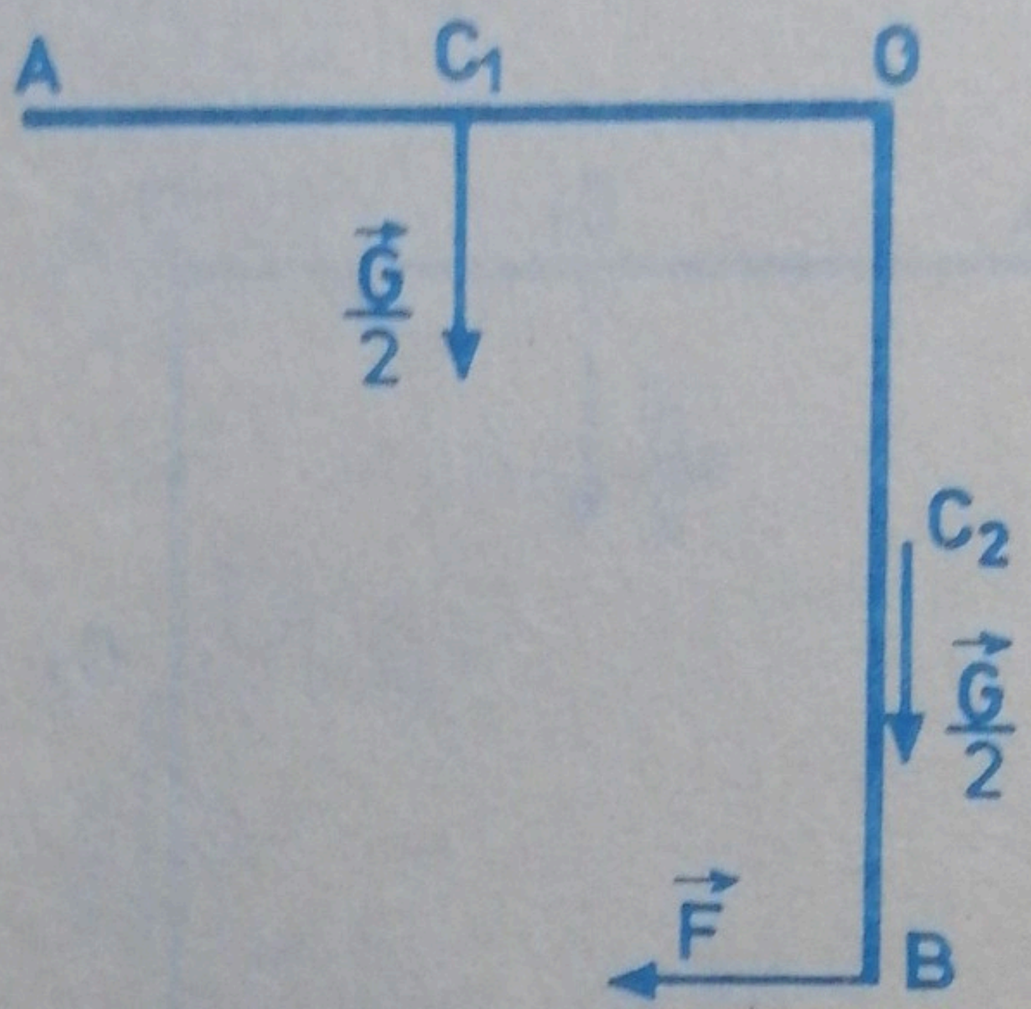


Figura I.35

$$\frac{G}{2} OC_1 = F\ OB;$$

$OB = 2\ OC_1$;

$F = G/4$.

3) Poziţia de echilibru a pîrghiei este reprezentată în desenul din figura I.36.

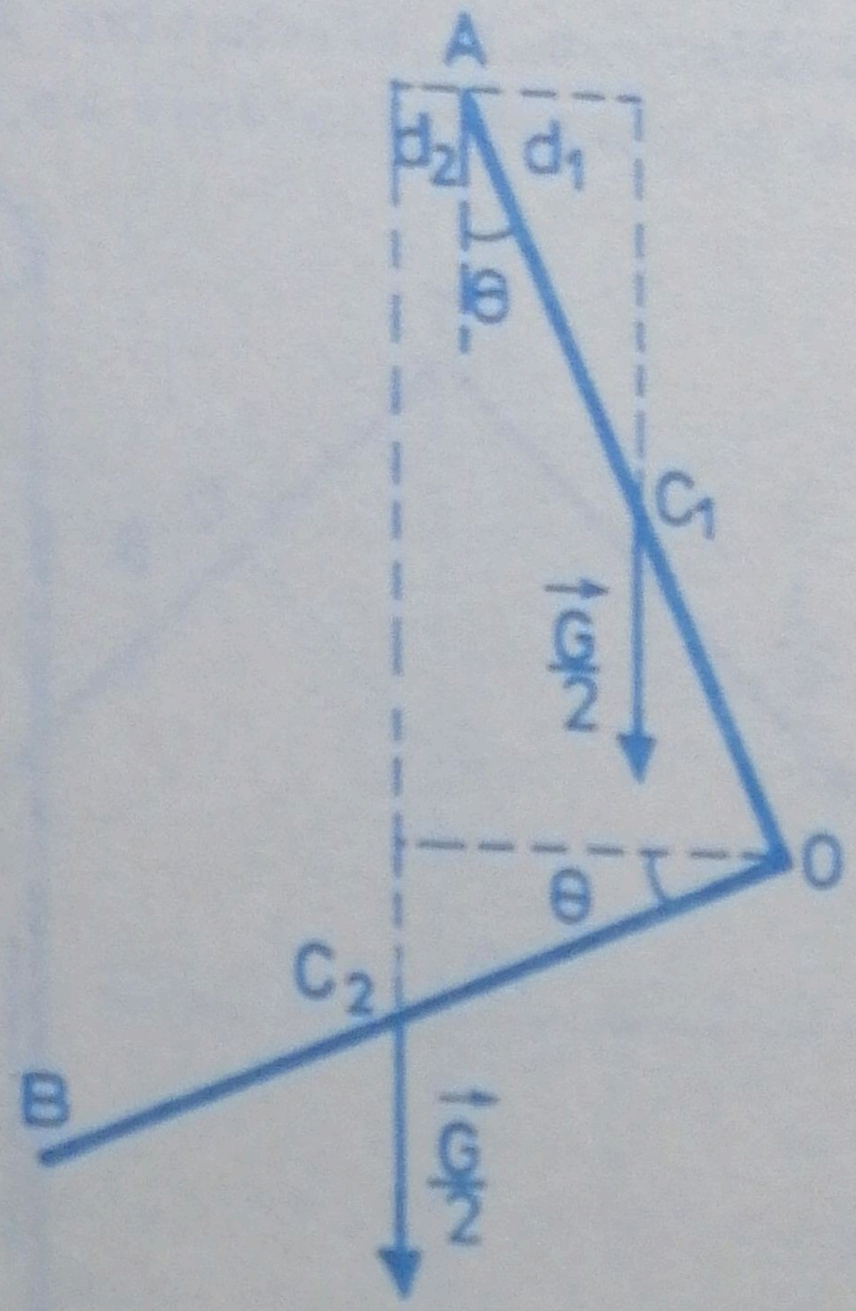


Figura I.36

Echilibrul pîrghiei este realizat atunci cînd în raport cu punctul A suma vectorială a momentelor forţelor este nulă.

Rezultă:

$$\frac{G}{2} d_1 = \frac{G}{2} d_2;$$

$$d_1 = d_2;$$

$$d_1 = AC_1 \sin\theta;$$

$$d_2 = OC_2 \cos\theta - OA \sin\theta;$$

$$AC_1 \sin\theta = OC_2 \cos\theta - OA \sin\theta;$$

$$OC_2 = AC_1;\ OA = 2\ AC_1;$$

$$AC_1 \sin\theta = AC_1 \cos\theta - 2\ AC_1 \sin\theta;$$

$$3\sin\theta = \cos\theta;$$

$$9\sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta;$$

$$\sin\theta = \sqrt{10}/10.$$

4) Poziţia de echilibru a pîrghiei este prezentată în desenul din figura I.37.

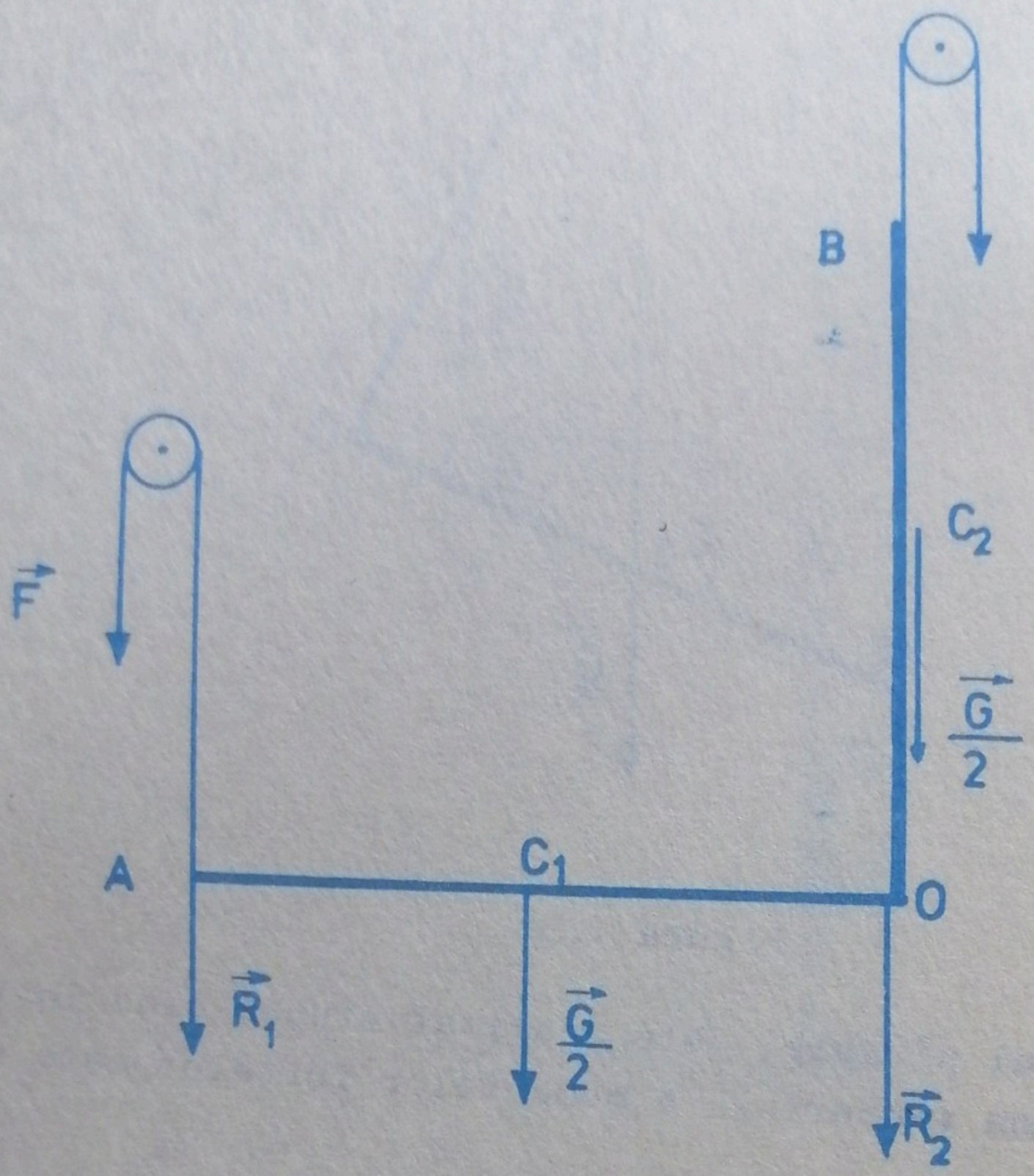


Figura I.37

Componenta G/2 care acţionează în C_1 se poate descompune în două componente egale cu G/4, una acţionînd în A şi cealaltă acţionînd în O. Tot în punctul O se poate considera că acţionează şi greutatea G/2 a braţului OB.

Rezultă că în punctele A şi O acţionează forţele:

$$R_1 = G/4;$$

$$R_2 = G/4 + G/2 = 3G/4.$$

Pentru ca braţul OA să rămînă orizontal trebuie acţionat la capetele firelor trecute peste cei doi scripeţi cu forţele:

$$F = R_1 = G/4;$$

$$Q = R_2 = 3G/4.$$

5) Cerînd ca prin aşezarea unui corp cu masa m pe latura OA aceasta să rămînă orizontală, însemnează că am pus corpul într-un punct aflat pa verticala centrului de greutate al pîrghiei.

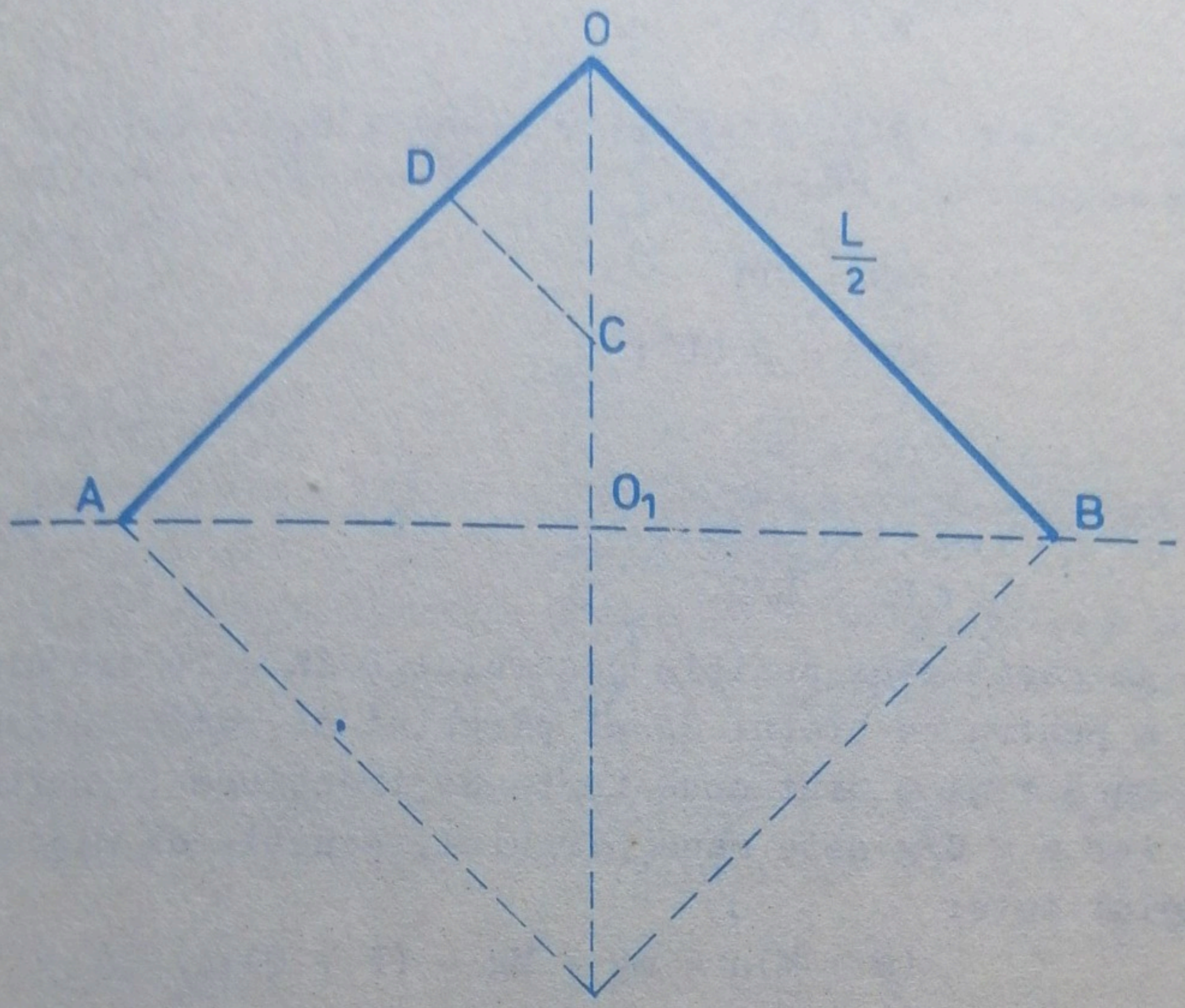


Figura I.38

Pentru determinarea centrului de greutate al pîrghiei ne vom folosi de teorema lui Guldin-Pappus:

$$S = 2\pi rL,$$

unde notaţiile au următoarele semnificaţii:

S = aria suprafeţei obţinută prin rotirea unei curbe plane în jurul unei axe care nu intersectează curba. In cazul nostru curba plană este formată din laturile unghiului drept, pe care îl vom roti în jurul unei axe ce trece prin punctele A şi B, aşa cum indică desenul din figura I.38. Se obţine un dublu con.

r = raza cercului descris de centrul de greutate;

L = lungimea curbei plane. In cazul nostru lungimea pîrghiei.

$$S = 2\pi R \frac{L}{2};$$

$$R = OO_1 = \frac{L}{\sqrt{8}}\ ;\ S = \pi \frac{L^2}{\sqrt{8}};$$

$$r = OO_1 - OC;$$

$$\pi \frac{L^2}{\sqrt{8}} = 2\pi rL;\ r = \frac{L}{2\sqrt{8}} = O_1C = OC;$$

$$OD = CD;$$

$$OC^2 = 2\ OD^2;$$

$$OD = \frac{OC}{\sqrt{2}};$$

$$OD = L/8.$$

Am găsit deci poziţia punctului D în care trebuie aşezat corpul m pentru ca braţul OA al pîrghiei să rămînă orizontal.

Dacă F şi Q sînt două forţe de tracţiune (tensiuni în fire), iar M = G/g este masa pîrghiei, ecuaţia de mişcare a sistemului este:

$$(m + M)a = mg + Mg - (F + Q);$$

$$F = G/4 = Mg/4;\ Q = 3G/4 = 3Mg/4;$$

$$(m + M)\ a = mg + Mg - Mg;$$

$$a = \frac{m}{m + M}g.$$

Din condiţia a = g/2 rezultă:

$$m = M.$$

Dacă F şi Q sînt greutăţile unor corpuri suspendate de capetele firelor, ecuaţia de mişcare a sistemului este:

$$(m + M + m_1 + m_2)a = mg + Mg + (-F - Q);$$

$$m_1 = F/g;\ m_1 = M/4;$$

$$m_2 = Q/g;\ m_2 = 3M/4;$$

$$(m + M + \frac{M}{4} + \frac{3M}{4})a = mg + Mg - Mg;$$

$$a = \frac{mg}{m + 2M};\ a = g/2;$$

$$m = 2M.$$

6) Viteza sistemului după n secunde este:

$$v = at = gn/2.$$

Dacă în acest moment se îndepărtează corpul cu masa m de pe pîrghie, principiul inerţiei impune continuarea mişcării cu viteza gn/2.

Problema 24

Motorul unei maşini cu masa m_1 dezvoltă puterea P_1 pentru a ajunge la viteza v plecînd din repaus.

1) Ce putere trebuie să dezvolte motorul unei maşini cu masa m_2 pentru a ajunge de la viteza v_o la viteza v în acelaşi interval de timp?

2) Ce distanţă a parcurs fiecare maşină? Se cunoaşte coeficientul de frecare.

Rezolvare

1)

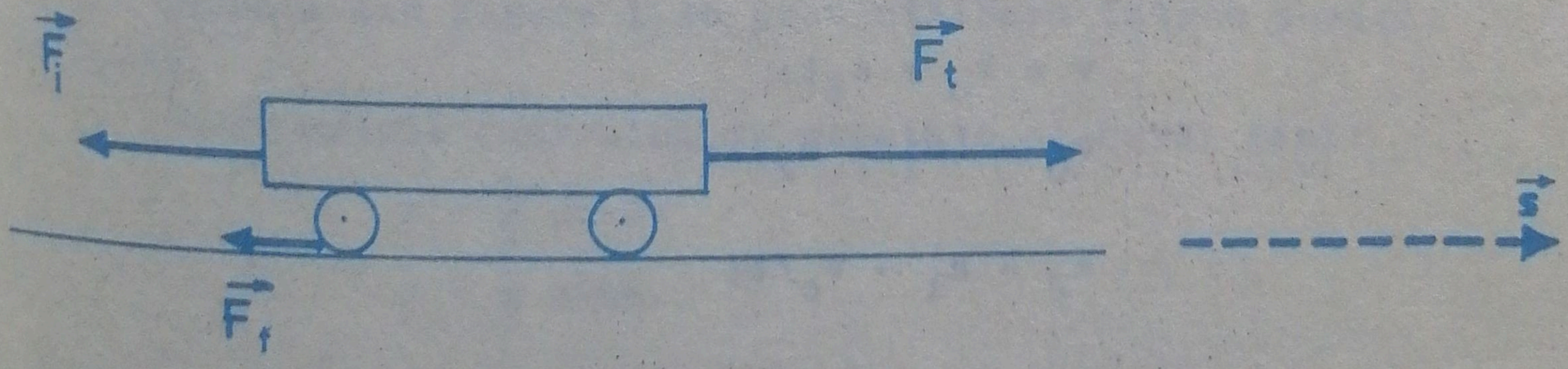


Figura I.39

Principiul lui d'Alembert aplicat forţelor reprezentate în desenul din figura I.39 conduce la relaţia:

$$F_t = F_i + F_f = m(a + \mu g).$$

Pentru prima maşină se pot scrie relaţiile:

$$v = a_1 t;$$

$$P_1 = \frac{F_{t1} s_1}{t} = \frac{m_1(a_1 + \mu g)a_1 t^2}{2t};$$

$$a_1 + \mu g = \frac{2P_1}{m_1 v};$$

$$a_1 = \frac{2P_1 - \mu g m_1 v}{m_1 v};$$

$$t = \frac{v}{a_1} = \frac{m_1 v^2}{2P_1 - \mu g m_1 v}.$$

Pentru a doua maşină:

$$P_2 = \frac{F_{t2} s_2}{t} = \frac{m_2(a_2 + \mu g)}{t}(v_o t + \frac{a_2 t^2}{2});$$

$$P_2 = m_2(a_2 + \mu g)(v_o t + \frac{a_2 t^2}{2})$$

$$v = v_o + a_2 t;$$

$$a_2 t = v - v_o;$$

$$P_2 = m_2(a_2 + \mu g)\frac{v_o + v}{2};$$

$$v = a_1 t;$$

$$v = v_o + a_2 t;$$

$$v_o = (a_1 - a_2)t;$$

$$a_2 = a_1 - v_o/t;$$

$$a_2 = \frac{(2P_1 - \mu g m_1 v)(v - v_o)}{m_1 v^2};$$

$$P_2 = \frac{m_2(2P_1 - \mu g m_1 v)(v^2 - v_o^2)}{2m_1 v^2} + \frac{\mu g m_2(v + v_o)}{2}.$$

2)

$$s_1 = \frac{a_1 t^2}{2} = v^2/2a_1;$$

$$s_1 = \frac{m_1 v^3}{2(P_1 - \mu g m_1 v)};$$

$$s_2 = v_o t + \frac{a_2 t^2}{2} = v_o t + (a_1 - \frac{v_o}{t})\frac{t^2}{2} = s_1 + \frac{v_o t}{2}$$

$$s_2 = \frac{m_1 v^3}{2(2P_1 - \mu g m_1 v)} + \frac{m_1 v_o v^2}{2(2P_1 - \mu g m_1 v)};$$

$$s_2 = \frac{m_1 v^2 (v + v_o)}{2(2P_1 - \mu g m_1 v)}.$$

Problema 25

Cele două capete A şi B ale unei bare metalice cu lungimea L sînt obligate să alunece în lungul axei ox şi respectiv oy. Un resort elastic leagă mijlocul marei cu intersecţia celor două axe perpendiculare. Să se determine:

1) traiectoria centrului de greutate al barei;
2) pentru ce poziţie a barei forţa elastică din resort este maximă.

Rezolvare

Desenul din figura I.4o prezintă bara într-o poziţie oarecare.

Coordonatele centrului de greutate al barei sînt:

$$x = \frac{L}{2}\cos\theta;$$

$$y = \frac{L}{2}\sin\theta.$$

C-da 69 coala 6

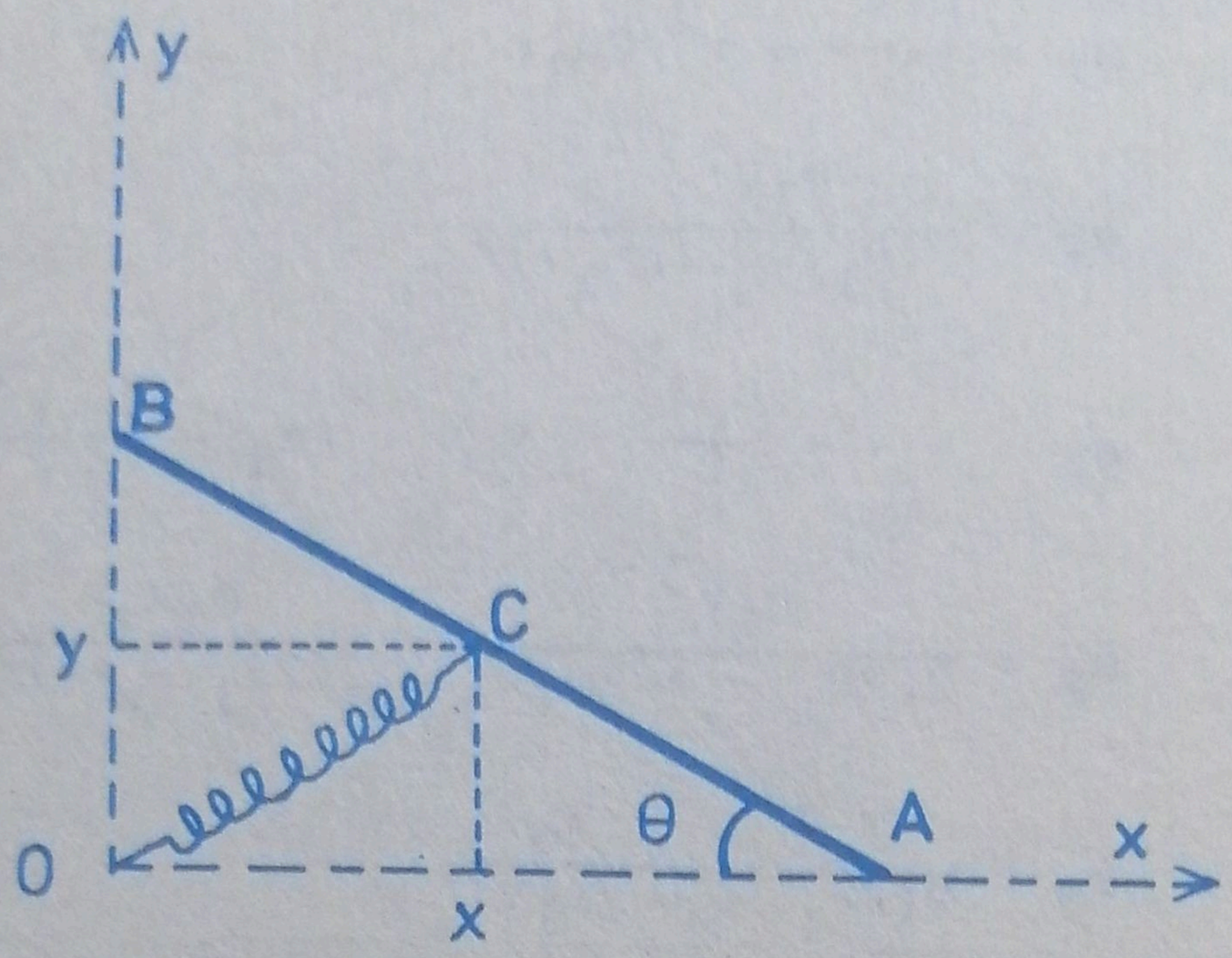


Figura I.4o

Aceste expresii constituie ecuaţiile parametrice ale traiectoriei centrului de greutate al barei. Pentru eliminarea parametrului θ să le ridicăm la pătrat şi să le adunăm.

Rezultă:

$$x^2 + y^2 = L^2/4.$$

Traiectoria centrului de greutate este un arc de cerc cu raza L/2.

2) Se ştie că forţa elastică este direct proporţională cu alungirea resortului. Deoarece pentru orice poziţie a barei punctul C descrie un cerc, însemnează că alungirea resortului este constantă, deci şi forţa elastică este constantă în modul, indiferent de poziţia barei.

Problema 26

Considerînd muşchiul monoarticular brahial, muşchi care se inserează cu un capăt pe osul braţului şi cu celălalt pe osul antebraţului, să se determine poziţia cea mai avantajoasă a pîrghiei osoase braţ - antebraţ, pentru ca forţa rezistentă pe care trebuie să o învingă forţa activă a muşchiului să fie maximă.

Rezolvare

Dispunerea elementelor pîrghiei este prezentată în desenul din figura I.41.

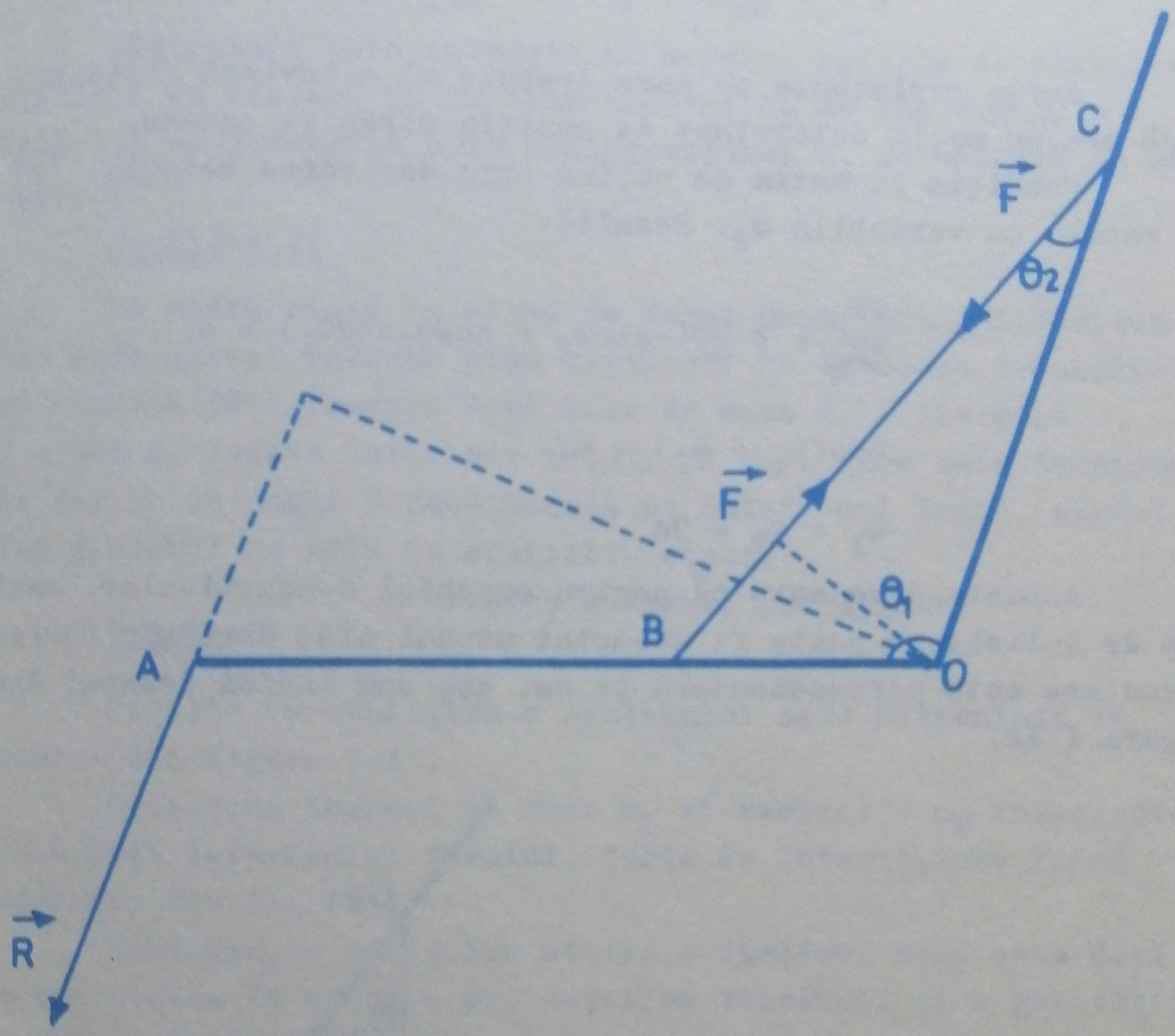


Figura I.41

F = forţa activă a muşchiului;
R = forţa rezistentă;
B; C = punctele de inserţie;
O = articulaţia oaselor braţ - antebraţ.

Condiţia de echilibru a pîrghiei este dată de legea de compunere a momentelor celor două forţe, faţă de articulaţia O:

$$R\ OA \cos(\theta_1 - 90^\circ) = F\ OB \cos\{\theta_1 - (90^\circ - \theta_2)\};$$

$$R\ OA \sin\theta_1 = F\ OB \sin(\theta_1 + \theta_2);$$

$$R = \frac{F\ OB\ \sin(\theta_1 + \theta_2)}{OA\ \sin\theta_1}; \qquad (1)$$

$$R = F\ \frac{OB}{OA}(\cos\theta_2 + \sin\theta_2 ctf\theta_1). \qquad (2)$$

Forţa rezistentă pe care trebuie să o învingă forţa activă are un maxim determinat de poziţia pîrghiei osoase.

Condiţia de maxim se obţine prin derivarea relaţiei (2) în raport cu variabila θ_2. Rezultă:

$$\frac{dR_2}{d\theta_2} = F\ \frac{OB}{OA}(-\sin\theta_2 + \cos\theta_2 ctg\theta_1) = 0;$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0;$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ.$$

Aceasta dovedeşte că pentru muşchiul monoarticular, maximum de solicitare poate fi suportat atunci cînd direcţia forţei musculare este perpendiculară pe os, aşa cum indică desenul din figura I.42.

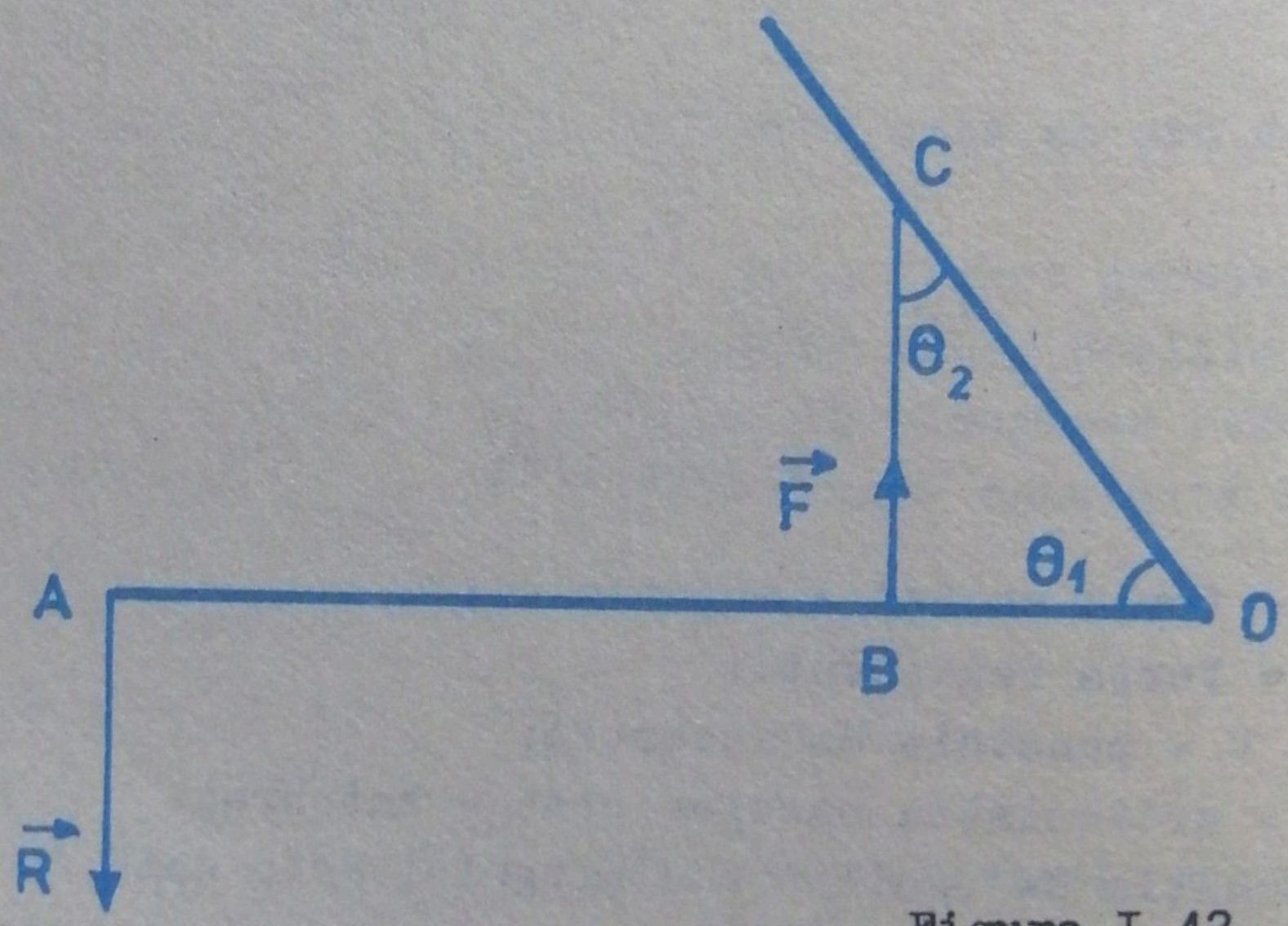


Figura I.42

Relaţia (1) devine:

$$R = F\ \frac{OB}{OA}(\sin\theta_1)^{-1}.$$

Această relaţie permite determinarea valorii forţei activă a mușchiului:

$$F = R \frac{OA}{OB} \sin\theta_1.$$

Elementele care intervin în această relaţie se stabilesc astfel: R se măsoară cu un dinamometru; OA se măsoară cu o riglă; OB se determină prin radiografiere; θ_1 se măsoară cu un raportor.

Problema 27

Un cadru rigid de sîrmă de forma unui triunghi dreptunghic este aşezat într-un plan vertical. Pe laturile triunghiului alunecă fără frecare două bile de mase m_1 = 100 g şi m_2 = 300 g, legate între ele printr-un fir. Care este tensiunea din fir şi ce unghi θ face acesta cu cateta mai lungă, atunci cînd sistemul se află în echilibru static?

(Fizica Modernă, R. Feynman)

Rezolvare

Poziţia de echilibru a sistemului este prezentată în desenul din figura I.43.

Cele două corpuri de mase m_1 şi respectiv m_2 interacţionează prin intermediul firului, forţa de interacţiune fiind tensiunea din fir (T).

Condiţia de echilibru static a fiecărui corp este dată de egalitatea în modul a proiecţiilor tensiunii şi a greutăţii pe cateta respectivă:

$$G_1 \cos 60^o = T \cos\theta;$$
$$G_2 \cos 30^o = T \sin\theta;$$

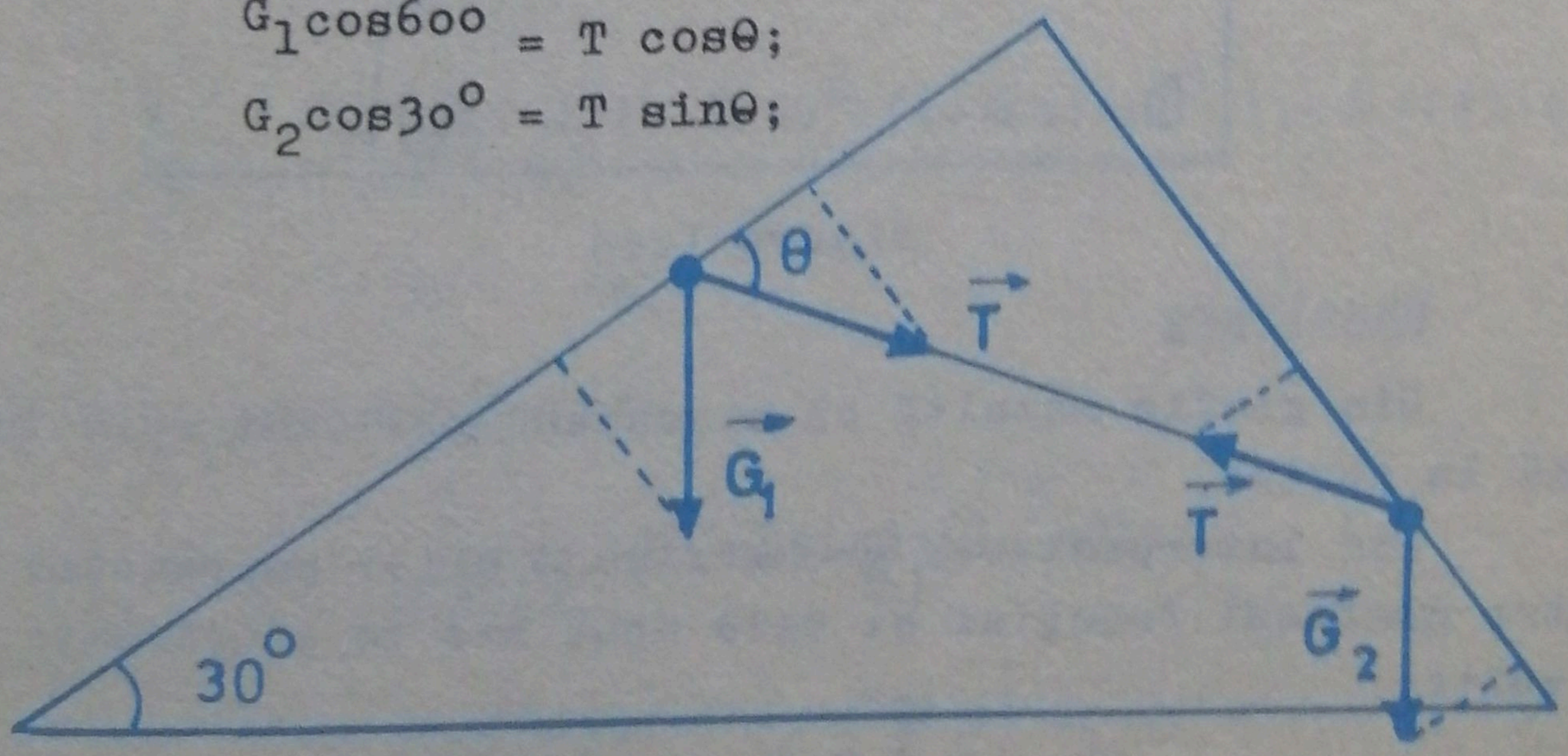


Figura I.43

$$\frac{m_1 g}{2} = T\cos\theta;\quad \frac{m_2 g}{2}\sqrt{3} = T\sin\theta.$$

$$tg\theta = \sqrt{3}\,\frac{m_2}{m_1} = 3\sqrt{3}.$$

$$T = \frac{g}{2}\sqrt{m_1^2 + 3m_2^2} = \sqrt{7}\ N.$$

Problema 28

. Graficul funcţiei $v = f(t)$ pentru un mobil aflat în mişcare rectilinie este reprezentat în desenul din figura I.44 printr-un sfert de cerc. Să se determine distanţa parcursă de mobil.

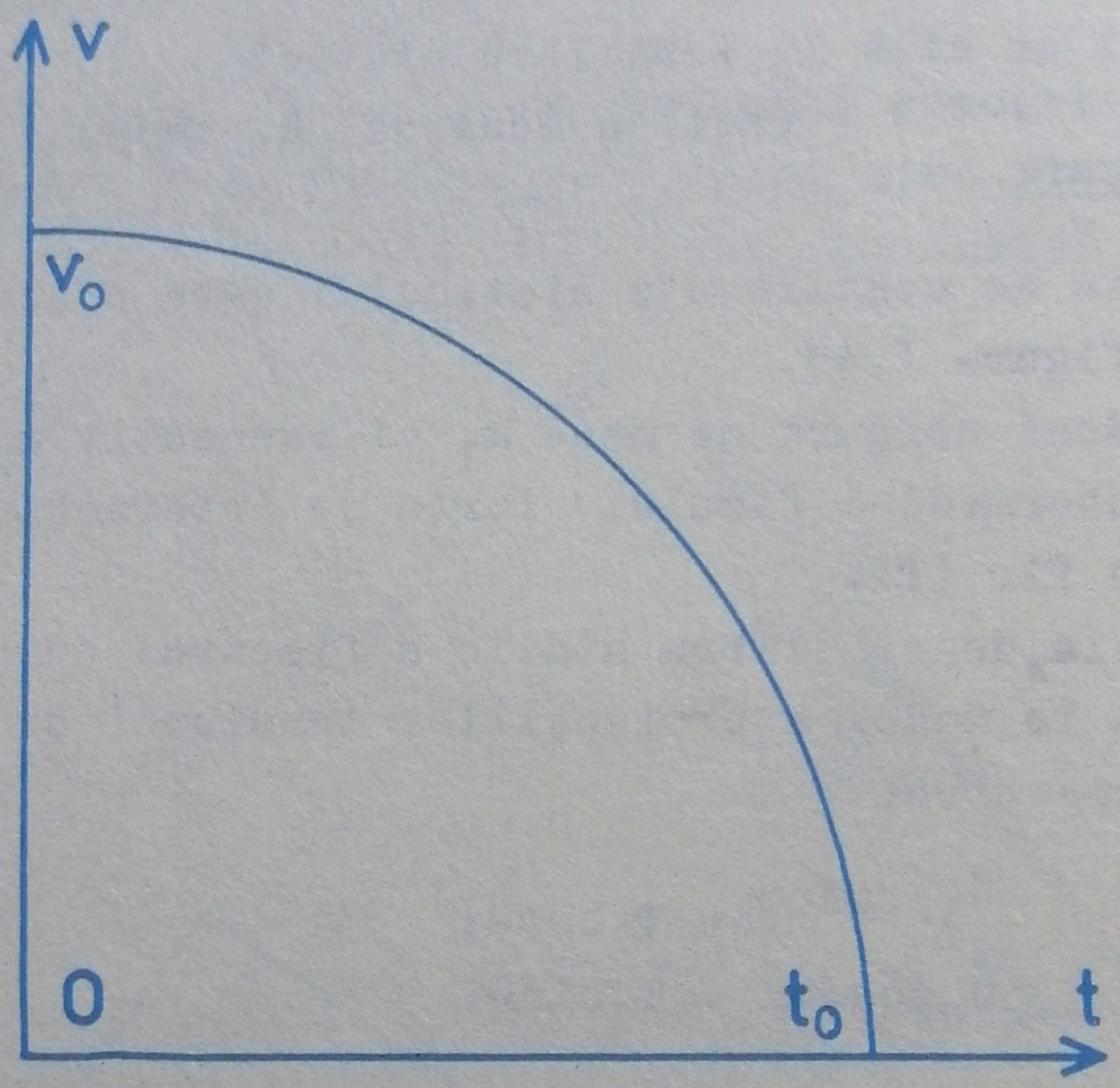


Figura I.44

Rezolvare

Din grafic rezultă că mişcarea mobilului este încetinită pînă la oprire.

Din interpretarea geometrică a ariei suprafeţei cuprinsă între graficul funcţiei şi cele două axe de coordonate, rezultă:

$$x_{max} = \frac{\pi}{4} v_o t_o.$$

Problema 29

Legile deplasărilor rectilinii pentru două mobile sînt:

M_1: $x = t^3 - t^2 + 4t + 2o$;

M_2: $x = - t^3 + t^2 + 4t + 2o$,

în care x este exprimat îm metri, iar t în secunde. Să se traseze graficele funcţiilor: $v = f(t)$ şi $a = g(t)$ pentru fiecare mobil şi să se analizeze comparativ mişcările celor două mobile în intervalul $[o;\ 1\ s]$.

Rezolvare

Ecuaţia vitezei instantanee a unui mobil se deduce din expresia:

$$v = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

iar ecuaţia acceleraţiei instantanee se deduce din expresia:

$$a = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

în care:

$$\Delta t = t' - t;\ \Delta x = x' - x;\ \Delta v = v' - v.$$

Pentru mobilul M_1:

$$v = \lim_{\Delta t \to o} \frac{t'^3 - t'^2 + 4t' + 2o - (t^3 - t^2 + 4t + 2o)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to o} \{(t'^2 + t't + t^2) - (t' + t) + 4\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to o} \{(t + \Delta t)^2 + (t + \Delta t)t + t^2 - (t + \Delta t + t) + 4\};$$

$$v = 3t^2 - 2t + 4, \qquad (1)$$

în care v este exprimat în m/s.

$$a = \lim_{\Delta t \to o} \frac{3t'^2 - 2t' + 4 - (3t^2 - 2t + 4)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to o} \{3(t' + t) - 2\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ 3(t + \Delta t + t) - 2 \right\};$$

$$a = 6t - 2, \qquad (2)$$

în care a este exprimat în m/s^2.

In mod asemănător, pentru M_2, rezultă:

$$v = -3t^2 + 2t + 4; \qquad (3)$$

$$a = -6t + 2. \qquad (4)$$

Graficele funcţiilor reprezentate prin expresiile (1) şi (2) au fost trasate în desenul din figura I.45 cu linie continuă, iar graficele funcţiilor reprezentate prin expresiile (3) şi (4) au fost trasate în acelaşi desen prin linie discontinuă.

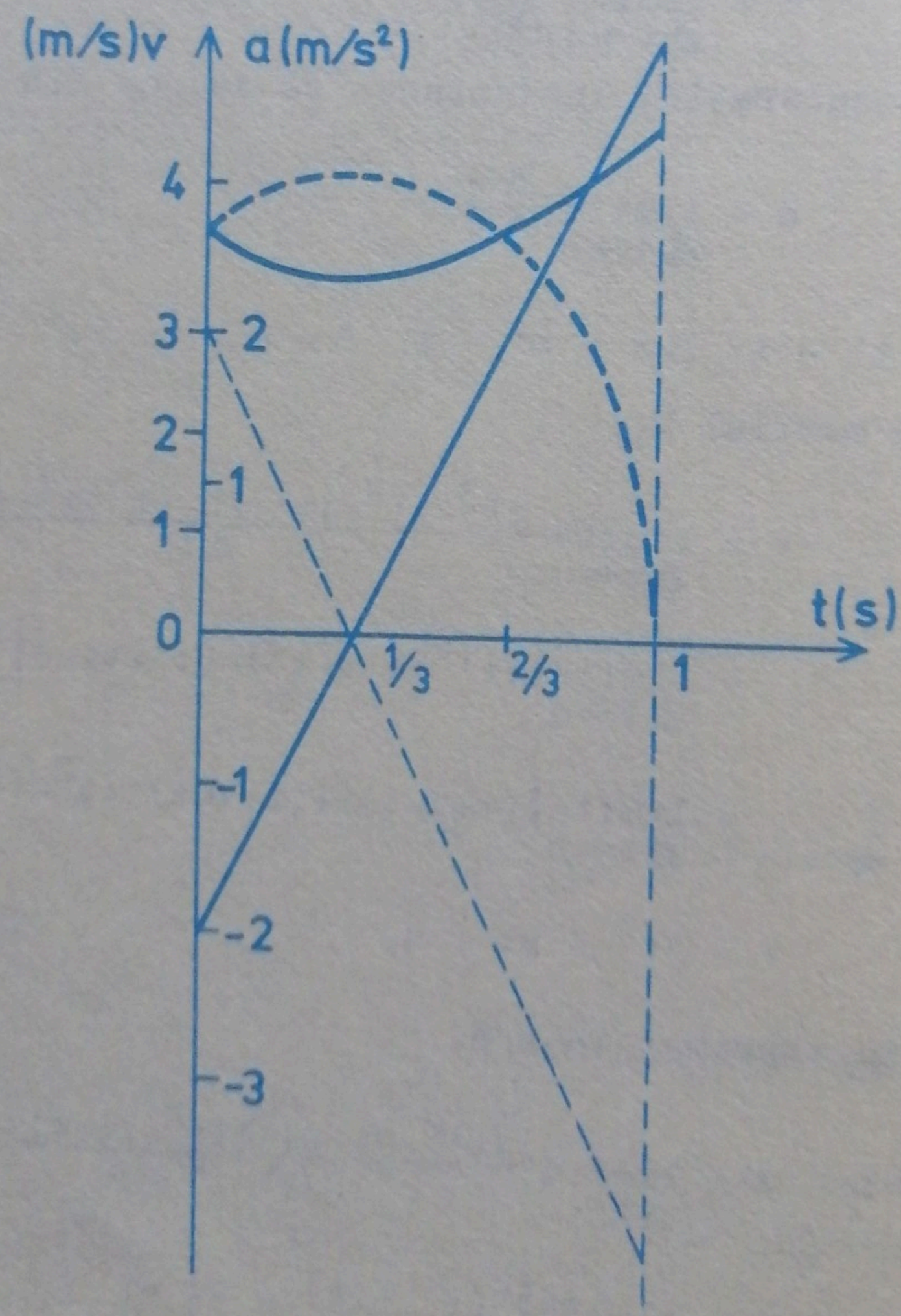


Figura I.45

Cele două mobile iau startul în acelaşi moment (t = o) din punctul de coordonată x_o = 2o m, deplasîndu-se în acelaşi sens, cu aceeaşi viteză iniţială v_o = 4 m/s. Mişcările celor două mobile sînt rectilinii neuniform variate.

Deoarece coeficientul lui t^2 din ecuaţia (1) este pozitiv, funcţia (1) atinge un minim. Din ecuaţia (2) se observă că în intervalul $[o;\ 1/3\ s)$ acceleraţia este variabilă, negativă. Deci în acest interval mişcarea mobilului M_1 este neuniform încetinită. Momentul anulării acceleraţiei (t = 1/3 s) este momentul realizării minimului vitezei mobilului M_1:

$$v_{min} = 11/3 \text{ m/s}.$$

Pentru valori ale lui t cuprinse în intervalul $(1/3\ s;\ 1\ s]$, acceleraţia mobilului este variabilă, pozitivă, deci în acest interval mişcarea mobilului M_1 este neuniform accelerată. Pentru t = 1 s, rezultă: v = 5 m/s; x = 24 m.

Deoarece coeficientul lui t^2 din ecuaţia (3) este negativ, funcţia (3) atinge un maxim. Din ecuaţia (4) se observă că în intervalul $[o;\ 1/3\ s)$ acceleraţia este variabilă, pozitivă, deci în acest interval mişcarea lui M_2 este neuniform accelerată. Momentul anulării acceleraţiei (t = 1/3 s) este momentul realizării maximului vitezei mobilului M_2:

$$v_{max} = 13/3 \text{ m/s}.$$

Pentru valori ale lui t cuprinse în intervalul $(1/3\ s;\ 1\ s]$ acceleraţia mobilului M_2 este variabilă, negativă. Ca urmare, în acest interval mişcarea este neuniform încetinită. Pentru t = 1 s, rezultă: v = o; x = 24 m.

In timpul mişcării, vitezele mobilelor sînt egale la momentul t = 2/3 s. In acel moment distanţa dintre mobile este 8/27 m.

Problema 3o

Se lasă liber să cadă un corp cu masa m_1, iar de la sol se aruncă simultan pe aceeaşi verticală în sus un alt corp cu masa m_2. Dacă cele două corpuri se ciocnesc plastic atunci cînd vitezele lor ating valorile maxime şi dacă primul corp a parcurs în secunda premergătoare ciocnirii distanţa d, să se de-

termine viteza ansamblului în momentul formării sale.

Rezolvare

Un corp lăsat liber atinge viteza maximă atunci cînd soseşte la sol.

Un corp aruncat de jos în sus are o mişcare uniform încetinită pînă la oprire, apoi în cădere va avea o mişcare uniform acceleratăă, astfel că viteza lui va fi maximă şi egală cu cea de la lansare, în momentul revenirii pe sol.

Deci punctul în care a avut loc ciocnirea este punctul de pe sol.

Dacă primul corp a căzut liber de la înălţimea h, atunci:

$$h = \frac{gt_{c1}^2}{2}.$$

Distanţa parcursă de acest corp în timpul t_{c1} - 1 s, este

$$h_1 = \frac{g}{2}(t_{c1} - 1s)^2 = \frac{gt_{c1}^2}{2} - gt_{c1} + \frac{g}{2}.$$

Distanţa parcursă de corp în ultima secundă este:

$$d = h - h_1 = gt_{c1} - g/2.$$

Rezultă:

$$t_{c1} = \frac{2d + g}{2g};$$

$$h = \frac{(2d + g)^2}{8g}.$$

Pentru corpul al doilea se pot scrie relaţiile:

$$h_{max} = v_o^2/2g;\ t_{u2} = t_{c2} = v_o/g;$$

$$t_2 = t_{u2} + t_{c2} = 2v_o/g.$$

Dacă $t_{c1} \neq t_2$ atunci cele două corpuri nu ajung simultan la sol. Din condiţiile impuse de problemă rezultă:

$$t_{c1} = t_2;$$

$$v_o = \frac{2d + g}{4};$$

$$h_{max} = h/4.$$

Ținînd seama că în momentul ciocnirii plastice impulsurile corpurilor au aceeaşi orientare, rezultă:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v;$$

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2};$$

$$v_1 = gt_{c1} = \frac{2d + g}{2};$$

$$v_2 = gt_{c2} = gv_o/g = v_o = \frac{2d + g}{4};$$

$$v = \frac{(2d + g)(2m_1 + m_2)}{4(m_1 + m_2)} \quad m/s.$$

Problema 31

Dintr-un punct de pe suprafaţa solului se lansează un proiectil cu viteza v_o sub unghiul Θ faţă de orizontală. Să se calculeze acceleraţia normală şi acceleraţia tangenţială în punctul corespunzător altitudinii h.

Rezolvare

In desenul din figura I.46 este prezentată forma traiectoriei mobilului şi este făcută descompunerea vectorului acceleraţie gravitaţională în cele două componente: $\vec{a}_n$ şi $\vec{a}_t$.

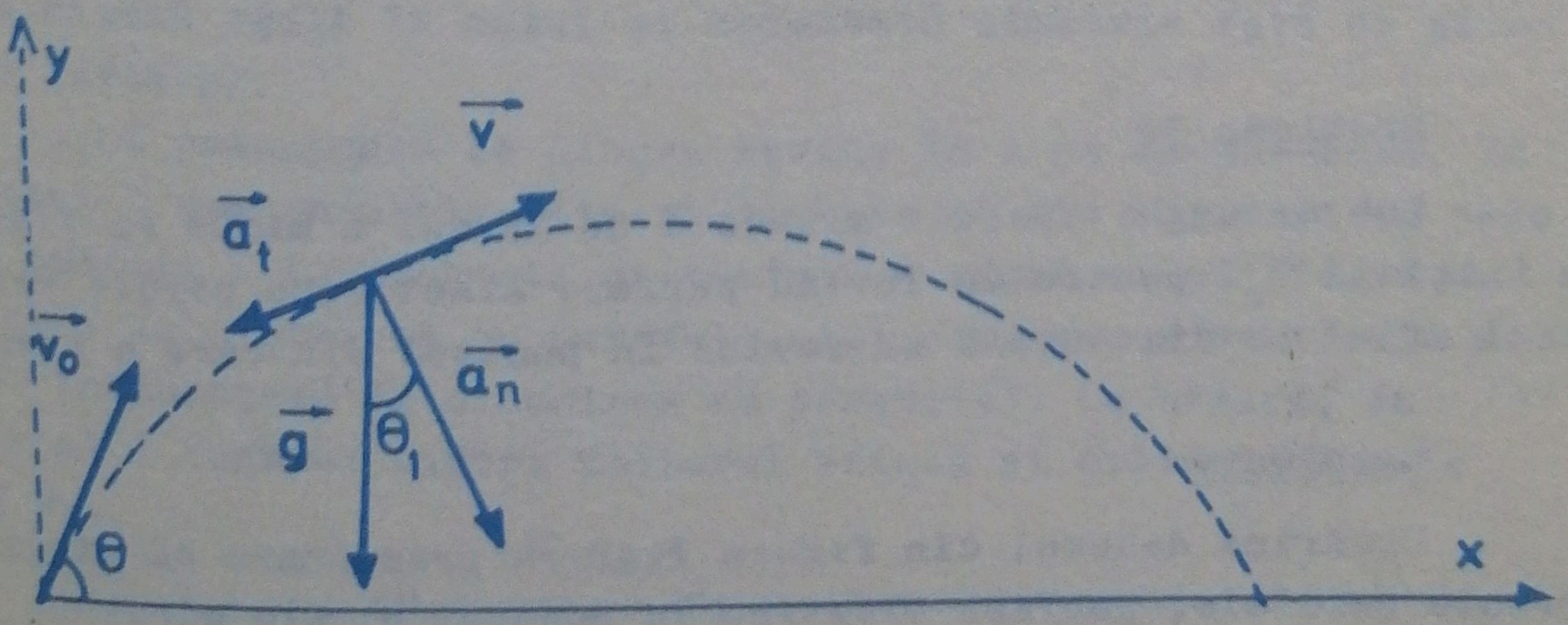


Figura I.46

$$\vec{g} = \vec{a}_t + \vec{a}_n;$$

$$g^2 = a_t^2 + a_n^2;$$

$$a_t = g \sin\theta_1;$$

$$a_n = g \cos\theta_1;$$

$$\cos\theta_1 = \frac{v_o \cos\theta}{v};$$

$$\cos\theta_1 = \frac{v_o \cos\theta}{\sqrt{v_o^2 - 2gh}};$$

$$a_n = g \frac{v_o \cos\theta}{\sqrt{v_o^2 - 2gh}};$$

$$a_t = g \sqrt{\frac{v_o^2 \sin^2\theta - 2gh}{v_o^2 - 2gh}}.$$

Problema 32

Sub ce unghi trebuie aruncată de la sol o minge cu viteza iniţială v_o, pentru ca lovind perfect elastic un perete vertical aflat la distanţa d să revină în punctul din care a plecat?

Rezolvare

Urmărind desenul din figura I.47 să presupunem că mingea loveşte peretele, perfect elastic, în punctul B, ale cărui coordonate sînt:

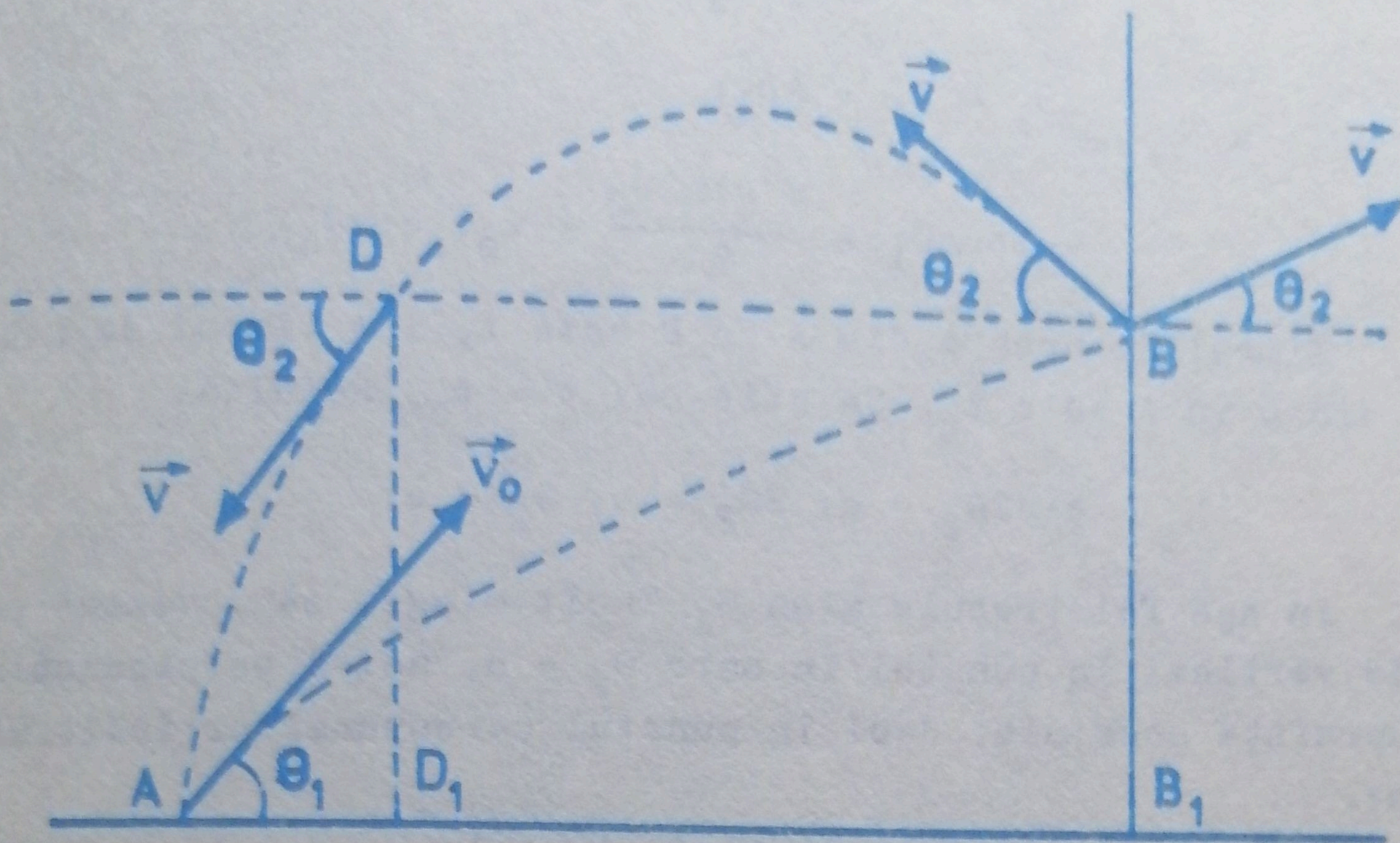


Figura I.47

$$x = v_o t \cos\theta_1 = d;$$

$$y = v_o t \sin\theta_1 - gt^2/2.$$

Vectorul viteză în punctul B formează cu orizontala unghiul θ_2 şi are componentele:

$$v_x = v_o \cos\theta_1 = v \cos\theta_2;$$

$$v_y = v_o \sin\theta_1 - gt = v \sin\theta_2.$$

Ciocnirea fiind perfect elastică, mingea este reflectată cu o viteză egală în modul şi orientată simetric faţă de peretele vertical.

Să presupunem că mingea revine în A pe drumul BCDA. In punctul D componentele vitezei trebuie să fie aceleaşi cu cele din punctul B (componenta orizontală a rămas nemodificată ca valoare la ciocnirea cu peretele, iar componenta verticală n-a fost influenţată de ciocnirea cu peretele). Ca urmare, în punctul D unghiul dintre vectorul viteză şi orizontală este tot θ_2.

$$BD = \frac{v^2 \sin 2\theta_2}{g};$$

$$AD_1 = v_o \cos\theta_1 t_c;$$

$$AB_1 = BD + AD_1;$$

$$v_o t \cos\theta_1 = \frac{v^2 \sin 2\theta_2}{g} + v_o t_c \cos\theta_1.$$

Timpul de urcare din A în B este t, iar timpul de coborîre din D în A este t_c. Se ştie că: $t = t_c$. Rezultă:

$$\sin 2\theta_2 = o; \quad 2\theta_2 = o; \quad \theta_2 = o.$$

In aşa fel trebuie ales θ_1 încît mingea să lovească peretele vertical în punctul în care $\theta_2 = o$, adică perpendicular pe suprafaţa acestuia, deci în punctul corespunzător înălţimii maxime.

Rezultă că peretele vertical trebuie aşezat la o distanţă d egală cu jumătate din bătaia aruncării, adică:

$$d = X/2;$$

$$X = 2d;$$

$$\frac{v_o^2 \sin 2\theta_1}{g} = 2d; \quad \sin 2\theta_1 = 2gd/v_o^2.$$

Problema 33

De la sol se aruncă oblic un corp. Deasupra sa, de la înălţimea h = 5 m se lansează simultan un alt corp, pe orizontală. Stiind că au căzut în acelaşi loc şi în acelaşi moment şi că unghiul dintre tangentele la traiectorii în punctul de cădere este $\theta_2 = \arcsin(\sqrt{lo}/lo)$, să se calculeze:

1) vitezele iniţiale şi unghiul de lansare θ_1.

2) Dacă cele două corpuri au masele egale să se scrie ecuaţia traiectoriei centrului de masă al sistemului şi din expresia acesteia să se deducă bătaia aruncărilor.

3) Să se determine distanţa dintre corpuri după o,5 s de la lansare.

4) Să se calculeze viteza ansamblului obţinut prin ciocnirea plastică a corpurilor.

Rezolvare

1) Traiectoriile celor două corpuri, precum şi traiectoria centrului de masă al sistemului sînt reprezentate în desenul din figura I.48.

$$t_{u1} + t_{c1} = t_{c2};$$

$$\frac{2v_{o1}\sin\theta_1}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

$$v_{o1}\sin\theta_1 = 5; \qquad (1)$$

$$X_1 = X_2;$$

$$v_{o1}\cos\theta_1(t_{u1} + t_{c1}) = v_{o2}t_{c2};$$

$$v_{o1}\cos\theta_1 = v_{o2}. \qquad (2)$$

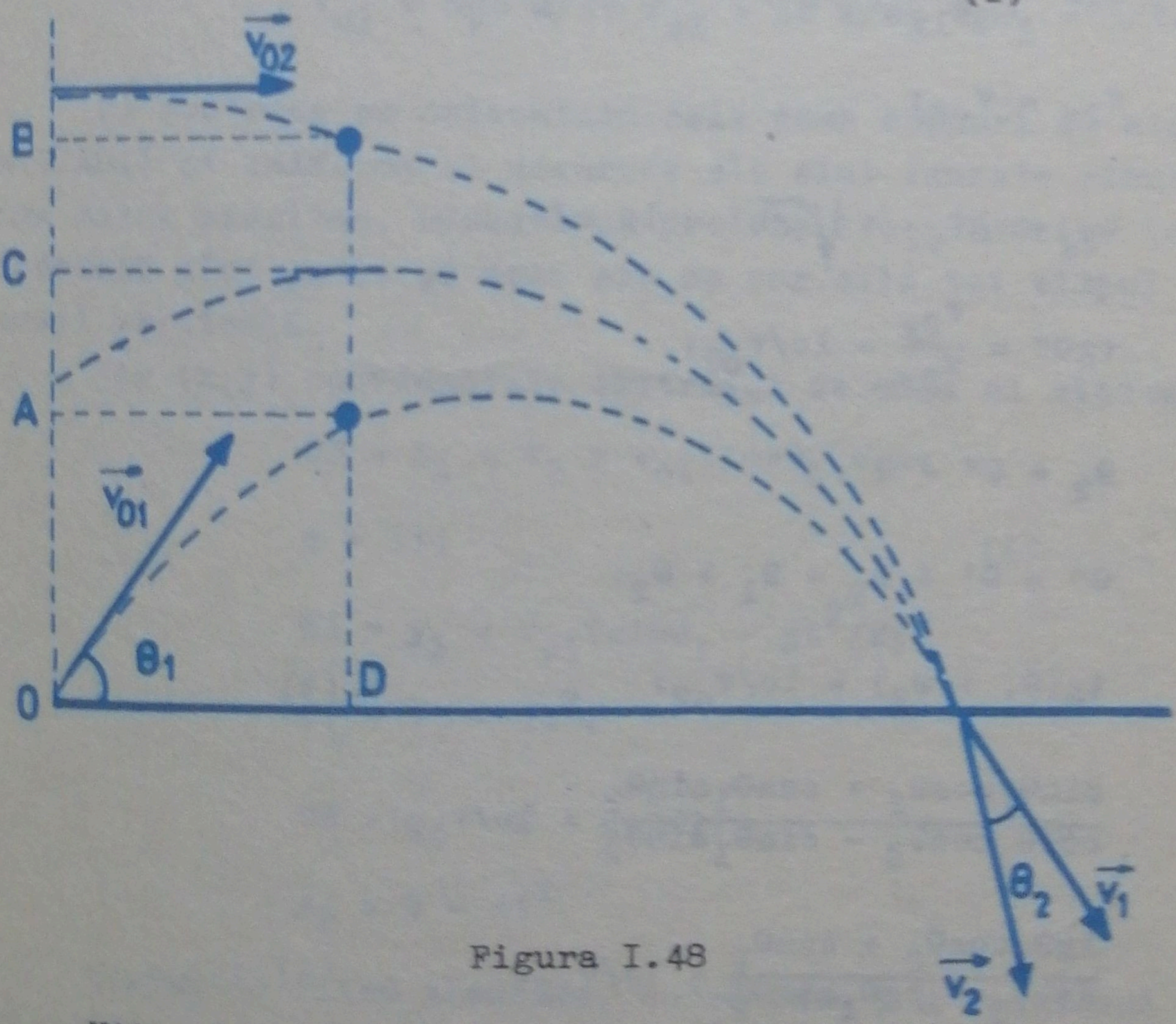


Figura I.48

Vitezele celor două corpuri, în momentul atingerii solului, sînt prezentate în desenele din figura I.49.

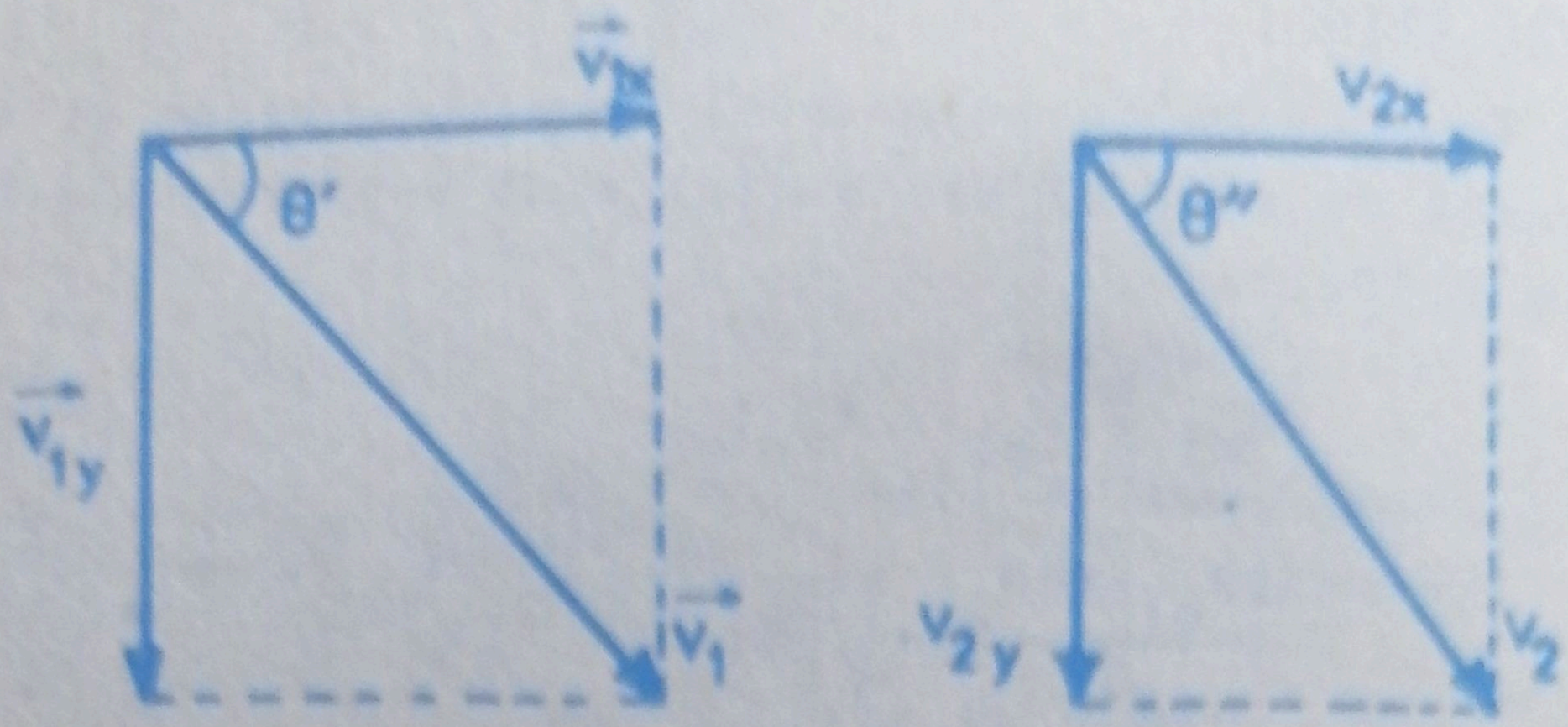


Figura I.49

Rezultă:

$$v_{1x} = v_{o1}\cos\theta_1;$$

$$v_{1y} = gt_{c1} = v_{o1}\sin\theta_1;$$

$$tg\theta' = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = tg\theta;\ \theta' = \theta;$$

$$v_{2x} = v_{o2};$$

$$v_{2y} = gt_{c2} = \sqrt{2gh} = 10 \text{ m/s};$$

$$tg\theta'' = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = 10/v_{o2};$$

$$\theta_2 = \theta'' - \theta';$$

$$\theta'' = \theta' + \theta_2 = \theta_1 + \theta_2;$$

$$tg(\theta_1 + \theta_2) = 10/v_{o2}; \qquad (3)$$

$$\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2} = 10/v_{o2};$$

$$\frac{tg\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2}{\cos\theta_2 - tg\theta_1\sin\theta_2} = 10/v_{o2}. \qquad (4)$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$tg\theta_1 = 5/v_{o2}. \qquad (5)$$

Ecuaţia (4) devine:

$$v_{o2}^2 \sin\theta_2 - 5v_{o2}\cos\theta_2 + 5o \sin\theta_2 = o. \qquad (6)$$

Ştiind că:

$$\sin\theta_2 = 1/\sqrt{1o};\ \cos\theta_2 = 3/\sqrt{1o},$$ rezultă:

$$v_{o2}^2 - 15\, v_{o2} + 5o = o. \qquad (7)$$

Ecuaţiile: (1), (5) şi (7) formează un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute (θ_1; v_{o1}; v_{o2}).

Soluţiile sistemului sînt:

$$v_{o1} = 5\sqrt{2}\ m/s;\ v_{o2} = 5\ m/s;\ \theta_1 = 45^o;$$

$$v_{o1} = 5\sqrt{5}\ m/s;\ v_{o2} = 1o\ m/s;\ tg\theta_1 = 1/2.$$

2) Deoarece pe orizontală cele două corpuri au mişcări rectilinii şi uniforme şi deoarece ele sînt lansate simultan şi ating solul simultan, rezultă că proiecţiile vitezelor lor pe orizontală sînt egale şi deci ele se vor afla tot timpul pe aceeaşi verticală.

Fie (x;y) coordonatele centrului de masă al sistemului:

$$OD = x_1 = x_2 = v_{o1}t\cos\theta_1 = x;$$

$$x = 5t; \qquad (1)$$

$$OA = y_1 = v_{o1}t\sin\theta_1 - gt^2/2;$$

$$y_1 = 5t - 5t^2;$$

$$OB = y_2 = h - gt^2/2;$$

$$y_2 = 5 - 5t^2.$$

Corpurile fiind identice, coordonata y a centrului de masă este:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

C-da 69 coala 7

$$y = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}t - 5t^2. \qquad (2)$$

A găsi bătaia aruncării din această ecuaţie, înseamnă a determina valoarea lui x, pentru y = o. Rezultă:

$$X = 5 \text{ m}.$$

3) $$d = y_2 - y_1 = 5 - 5t^2 - 5t + 5t^2 = 5 - 5t;$$

$$d = 2,5 \text{ m}.$$

4) $$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v};$$

$$m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2 = (m_1 + m_2)^2v^2;$$

$$m_1 = m_2;$$

$$v_1 = v_{o1};\ v_2 = \sqrt{v_{o2}^2 + 2gh};\ \cos\theta_2 = 3/\sqrt{10};$$

$$v = 62,32 \text{ m/s}.$$

Problema 34

Se aruncă simultan de la sol pe verticală în sus două mingi. Una ajunge la înălţimea maximă cu Δt secunde mai tîrziu decît a doua şi se opreşte cu ΔT secunde mai tîrziu decît aceasta. De la contactul i la contactul i+1 al primei mingi cu solul au trecut Δt_i secunde. Să se determine:

1) coeficientul de restituire;
2) vitezele iniţiale ale mingilor;
3) după cît timp s-a oprit fiecare minge;
4) ce lungime are drumul parcurs de fiecare minge.

Rezolvare

1) Timpul necesar primei mingi pentru a ajunge la înălţimea maximă este:

$$t_1 = v_{o1}/g,$$

iar pentru mingea a doua:

$$t_2 = v_{o2}/g.$$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{v_{o1} - v_{o2}}{g};$$

$$v_{o1} - v_{o2} = g\,\Delta t; \qquad (1)$$

$$v_{i+1} = kv_i;$$

$$v_1 = kv_o;$$

$$v_2 = kv_1 = k^2 v_o;$$

$$v_3 = kv_2 = k^3 v_o;$$

.....

$$v_n = k^n v_o;$$

$$\Delta t_i = t^{(i)}_{urcare} + t^{(i)}_{coborîre} = 2t^{(i)}_u = 2v_i/g;$$

$$T = \sum_{i=o}^{n} \Delta t_i = \frac{2}{g} v_o(1 + k + k^2 + ... + k^n);$$

$$T = \frac{2v_o}{g(1 - k)}.$$

Particularizînd, obţinem durata mişcării fiecărei mingi:

$$T_1 = \frac{2v_{o1}}{g(1 - k)};$$

$$T_2 = \frac{2v_{o2}}{g(1 - k)}.$$

Rezultă:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{2(v_{o1} - v_{o2})}{g(1 - k)};$$

$$v_{o1} - v_{o2} = \frac{g(1 - k)}{2} \Delta T. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$k = 1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta T}.$$

2) $\Delta t_1 = 2v_1/g = 2k^1 v_{o1}/g;$

$$v_{o1} = \frac{g\Delta t_1}{2k^1} = \frac{g\Delta t_1}{2(1 - 2\frac{\Delta t}{\Delta T})^1};$$

$v_{o2} = v_{o1} - g\Delta t.$

3) $$T_1 = \frac{2v_{o1}}{g(1 - k)};$$

$$T_2 = \frac{2v_{o1}}{g(1 - k)} - \Delta T = T_1 - \Delta T.$$

4) $L = 2(h_{o;max} + h_{1;max} + \dots + h_{n;max});$

$L = (v_o^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2)/g;$

$L = \frac{v_o^2}{g}(1 + k^2 + k^4 + \dots + k^{2n});$

$$L = \frac{v_o^2}{g(1 - k^2)};$$

$$L_1 = \frac{v_{o1}^2}{g(1 - k^2)};\ L_2 = \frac{v_{o2}^2}{g(1 - k^2)}.$$

Aplicaţie numerică: $\Delta t = 1$ s; $\Delta T = 1o$ s; $\Delta t_i = 2$ s;
$i = 2$; $g = 1o$ m/s^2.
Rezultă:
$k = o,8$; $v_{o1} = 15.625$ m/s; $v_{o2} = 5,625$ m/s;
$T_1 = 15,625$ s; $T_2 = 5,625$ s;
$L_1 = 67,76$ m; $L_2 = 8,78$ m.

Problema 35

Din primul şi din ultimul vagon ale unui tren, care se deplasează uniform cu viteza $\vec{v}$, se aruncă în plan orizontal, în acelaşi moment, două corpuri identice, avînd vitezele $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$

faţă de tren.

1) Cum sînt orientate vitezele $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ faţă de direcţia trenului, dacă cele două corpuri au căzut simultan într-un punct situat la jumătatea distanţei dintre poziţiile iniţiale, la depărtarea d faţă de calea ferată. Se cunoaşte lungimea trenului (L) şi înălţimea de lansare a corpurilor (h).

2) Sub ce unghi vor atinge pămîntul cele două corpuri şi ce viteză dacă în momentul ciocnirii plastice lovesc solul

Rezolvare

1) Desenul din figura I.5o prezintă proiecţiile pe sol ale mişcărilor celor două corpuri, de la lansare din punctele A şi respectiv B, pînă cînd ating simultan solul în C.

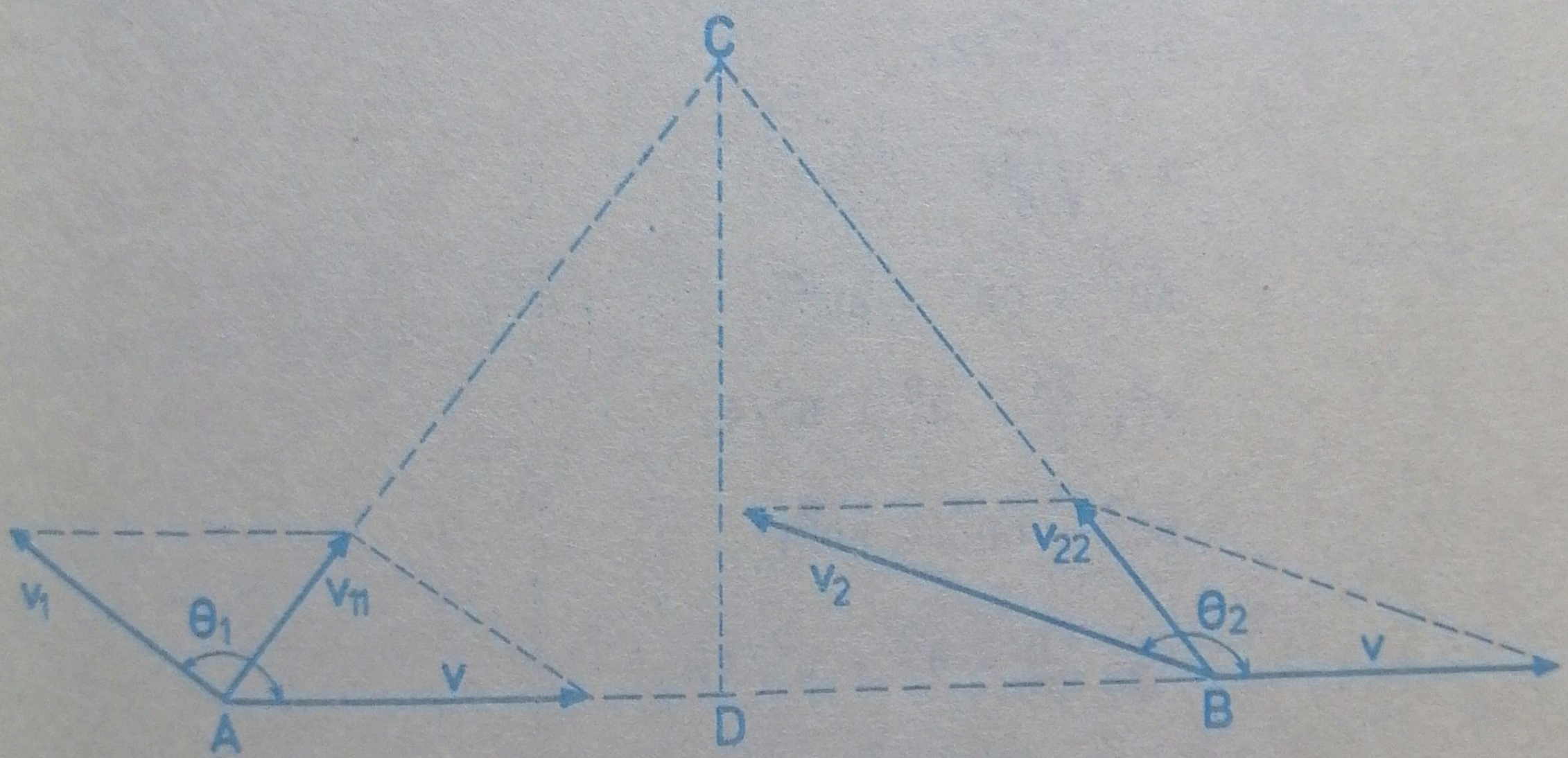


Figura I.5o

Inainte de a fi aruncate din tren, cele două corpuri au faţă de sol viteza $\vec{v}$, egală cu viteza trenului în raport cu solul.

In momentul lansării se imprimă corpurilor vitezele $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ faţă de tren, formînd cu direcţia acestuia unghiurile: θ_1 şi respectiv θ_2.

Viteza fiecărui corp în raport cu solul este rezultanta vectorială a vitezei sale faţă de tren şi viteza trenului faţă de sol.

$$\vec{v}_{11} = \vec{v} + \vec{v}_1;$$

$$\vec{v}_{22} = \vec{v} + \vec{v}_2;$$

$$v_{11}^2 = v^2 + v_1^2 + 2vv_1\cos\theta_1;$$

$$v_{22}^2 = v^2 + v_2^2 + 2vv_2\cos\theta_2.$$

Deoarece distanţele parcurse de proiecţiile corpurilor pe sol sînt egale, triunghiul ABC este isoscel.

$$AC = v_{11}t;\ BC = v_{22}t;$$

$$AC = BC;\ v_{11} = v_{22}.$$

Spaţiul parcurs pe verticală de fiecare corp este:

$$h = gt^2/2;$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

$$AC^2 = CD^2 + AD^2;$$

$$v_{11}^2 \frac{2h}{g} = d^2 + L^2/4;$$

$$BC^2 = CD^2 + BD^2;$$

$$v_{22}^2 \frac{2h}{g} = d^2 + L^2/4;$$

$$v_{11}^2 = g(d^2 + \frac{L^2}{4})/2h;$$

$$v_{22}^2 = g(d^2 + \frac{L^2}{4})/2h;$$

$$v^2 + v_1^2 + 2vv_1\cos\theta_1 = g(d^2 + \frac{L^2}{4})/2h;$$

$$v^2 + v_2^2 + 2vv_2\cos\theta_2 = g(d^2 + \frac{L^2}{4})/2h;$$

$$\cos\theta_1 = \frac{g(4d^2 + L^2)}{16hvv_1} - \frac{v}{2v_1} - \frac{v_1}{2v};$$

$$\cos\theta_2 = \frac{g(4d^2 + L^2)}{16hvv_2} - \frac{v}{2v_2} - \frac{v_2}{2v}.$$

2) Viteza fiecărui corp înainte de ciocnire, la sol, este tangentă la traiectorie, aşa cum indică desenul din figura I.51.

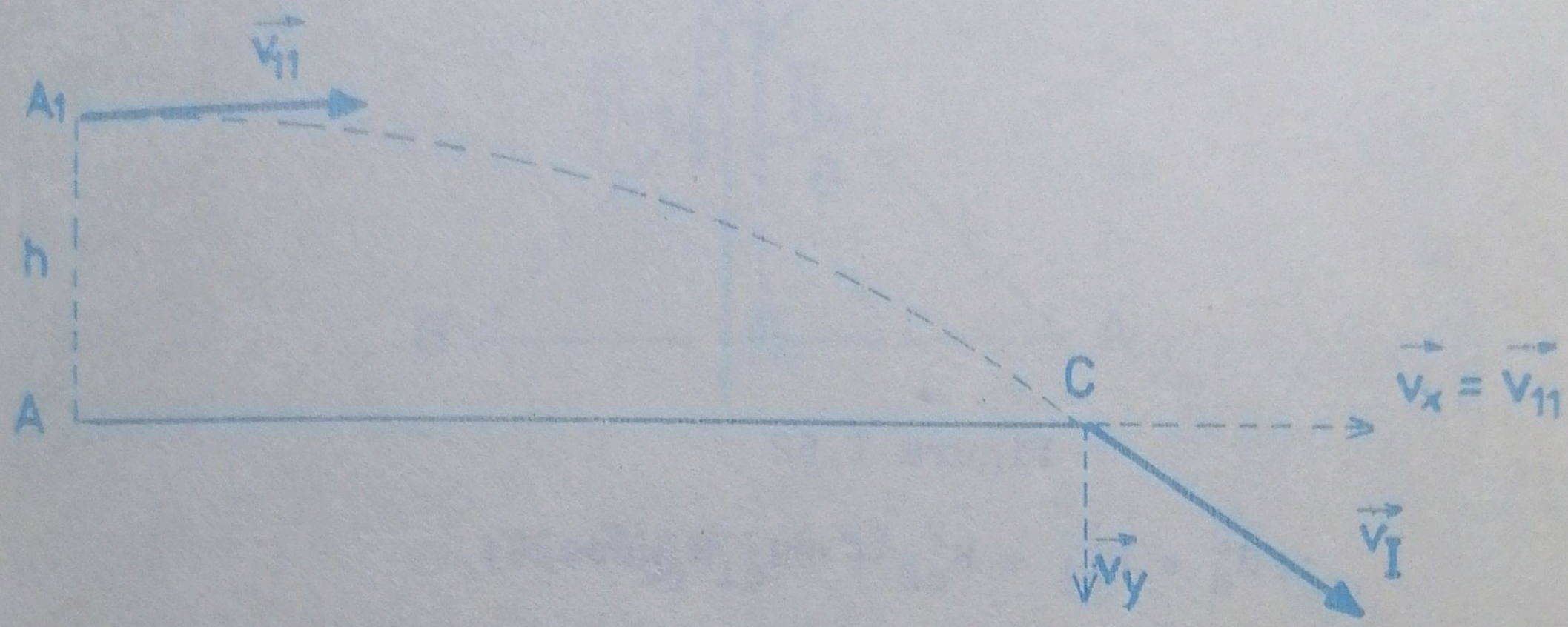


Figura I.51

In momentul atingerii (ciocnirii corpurilor) vitezele celor două corpuri sînt egale:

$$v_I^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_{II}^2;$$

$$v_I^2 = v_{11}^2 + 2gh = \frac{g(4d^2 + L^2)}{8h} + 2gh;$$

$$v_I = \sqrt{\frac{g(4d^2 + L^2)}{8h} + 2gh} = v_{II}.$$

Impulsul fiecărui corp în momentul ciocnirii poate fi descompus într-o componentă orizontală şi una verticală. Cele două componénte orizontale se vor compune şi vor da componenta orizontală a impulsului rezultant, iar cele două componente verticale se vor compune şi vor da componenta verticală a impulsului rezultant. Aceste două componente se vor compune şi vor da impulsul rezultant.

Pentru compunerea componentelor orizontale să urmărim desenul din figura I.52.

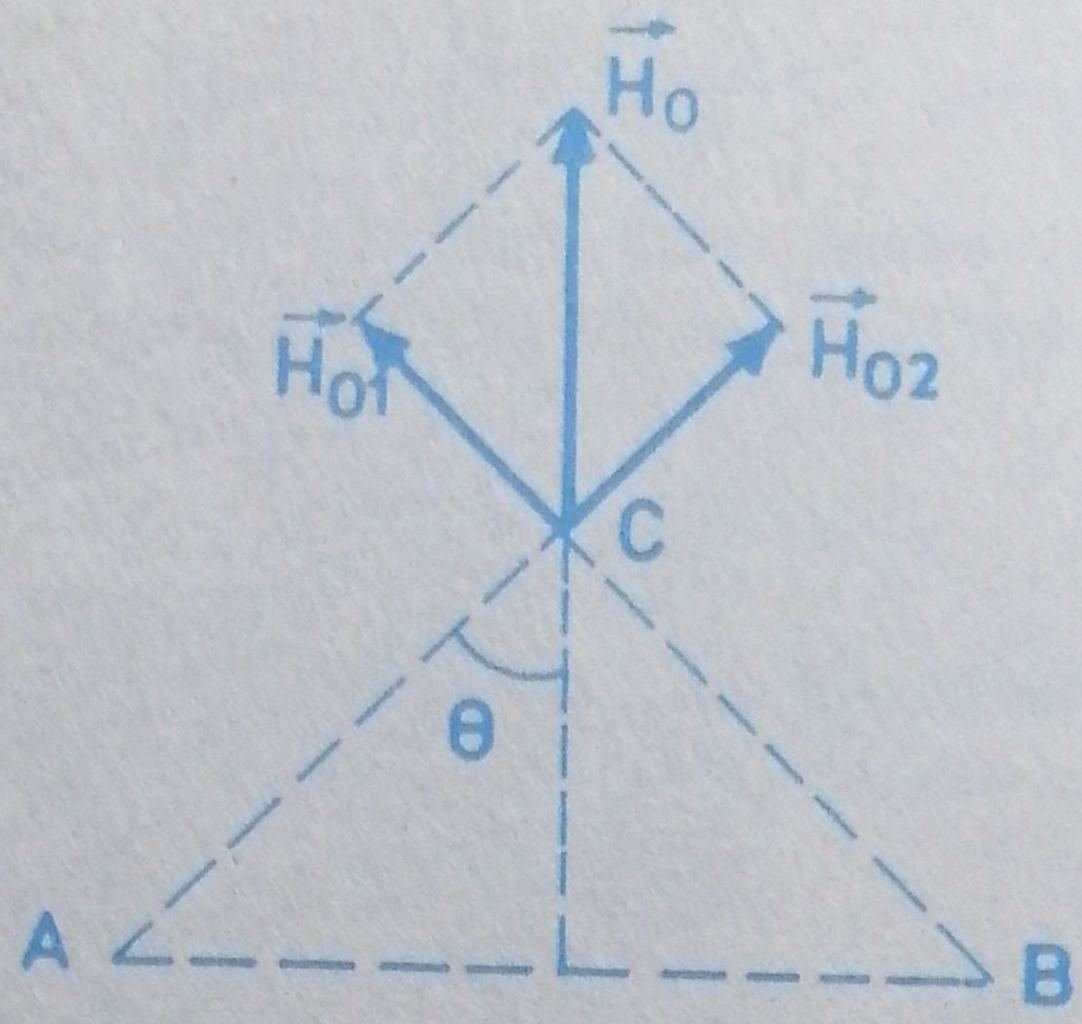


Figura I.52

$$H_o^2 = H_{o1}^2 + H_{o2}^2 + 2H_{o1}H_{o2}\cos 2\theta;$$

$$H_{o1} = m_1 v_{11};\ H_{o2} = m_2 v_{22};\ m_1 = m_2 = m;$$

$$v_{11} = v_{22};$$

$$H_{o1} = H_{o2} = m v_{11};$$

$$H_o^2 = 2H_{o1}^2(1 + \cos 2\theta) = 4H_{o1}^2 \cos^2\theta;$$

$$H_o = 2H_{o1}\cos\theta;$$

$$\cos\theta = \frac{2d}{\sqrt{4d^2 + L^2}};$$

$$H_o = 2m \frac{2d}{\sqrt{4d^2 + L^2}} \sqrt{v^2 + v_1^2 + 2vv_1\cos\theta_1};$$

$$H_o = \frac{4md}{\sqrt{4d^2 + L^2}} \cdot \sqrt{\frac{g(4d^2 + L^2)}{8h}};$$

$$H_o = 2md\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

Pentru compunerea componentelor verticale folosim desenul din figura I.53.

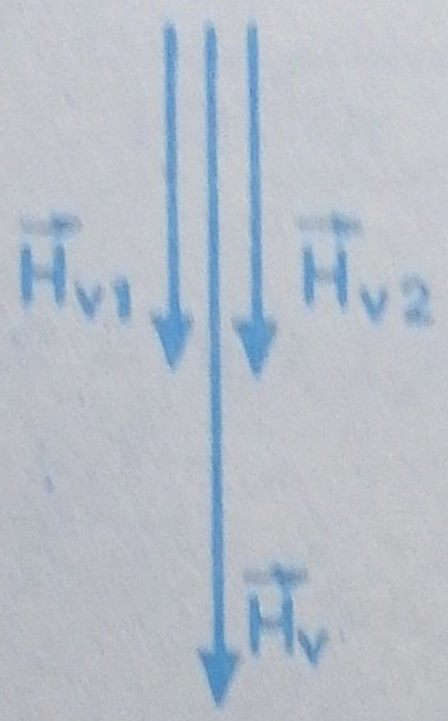


Figura I.53

$$H_v = H_{v1} + H_{v2};$$

$$H_{v1} = H_{v2} = mv_y = m\sqrt{2gh};$$

$$H_v = 2m\sqrt{2gh}.$$

Pentru calculul impulsului rezultant folosim desenul din figura I.54.

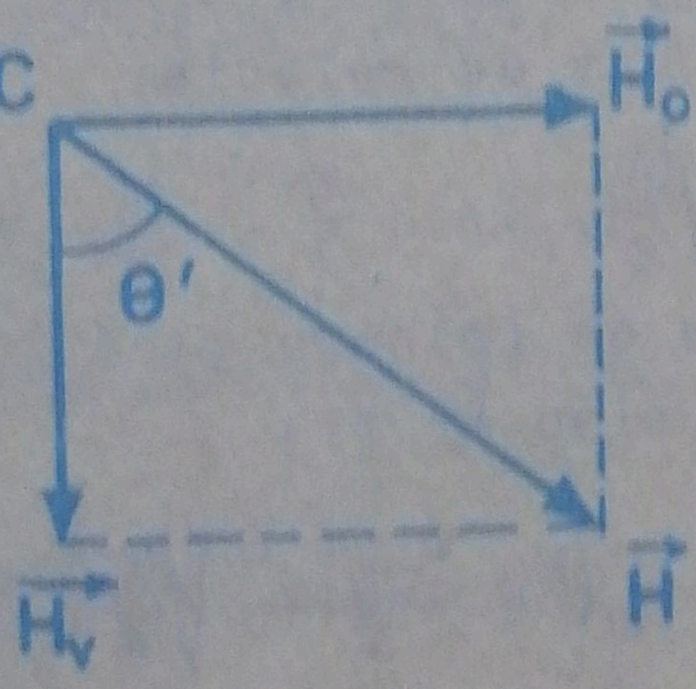


Figura I.54

$$H^2 = H_o^2 + H_v^2;$$

$$(m_1 + m_2)^2 v^2 = 2m^2 d^2 g/h + 8m^2 gh;$$

$$v = \sqrt{\underline{2gh + gd^2}/2h};$$

$$tg\theta' = H_o/H_v;\ tg\theta' = d/2h.$$

Problema 36

Un tren se deplasează rectiliniu şi uniform cu viteza v_o, apropiindu-se de intrarea într-un tunel. Mecanicul observă, deasupra intrării în tunel, o piatră în cădere liberă verticală. El apreciază că dacă ar încerca să frîneze, piatra ar lovi locomotiva, iar dacă şi-ar continua uniform drumul, piatra ar lovi ultimul vagon. Pentru a evita accidentul el hotărăşte să accelereze. Stiind că lungimea trenului este L şi că piatra a căzut la distanţa d în urma trenului, să se calculeze:

1) la ce distanţă faţă de intrarea înntunel se afla locomotiva;

2) acceleraţia trenului;

3) la ce înălţime se afla piatra în momentul trecerii locomotivei pe sub ea.

Rezolvare

1) Presupunînd că piatra a căzut de la înălţimea h, timpul de cădere este dat de relaţia:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Punînd condiţia de frînare pînă la oprire, spaţiul parcurs de tren în acest timp ar fi:

$$s_1 = v_m t = \frac{v_o + o}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Dacă trenul şi-ar continua mişcarea uniformă, în timpul t ar parcurge distanţa:

$$s_2 = v_o t = s_1 + L;$$

$$v_o \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_o}{2} \sqrt{\frac{2h}{g}} + L.$$

Rezultă:

$$h = \frac{2gL^2}{v_o^2};$$

$$s_1 = \frac{v_o}{2} \sqrt{\frac{4L^2}{v_o^2}};$$

$$s_1 = L.$$

2) Mişcîndu-se uniform accelerat, trenul parcurge în timpul t distanţa:

$$s_3 = s_2 + d = 2L + d;$$

$$s_3 = v_o t + a t^2/2.$$

Egalînd cele două expresii ale lui s_3 şi introducînd valoarea lui t, rezultă:

$$a = v_o^2 d/2L^2.$$

3) Distanţa străbătută de locomotivă pînă în momentul trecerii pe sub piatra în cădere este:

$$L = v_o t_1 + a t_1^2/2.$$

Păstrînd numai soluţia pozitivă, rezultă:

$$t_1 = \frac{2L^2}{v_o d} \left(\sqrt{1 + \frac{d}{L}} - 1\right).$$

In timpul t_1 piatra parcurge distanţa:

$$h_1 = \frac{2gL^4}{v_o^2 d^2} \left(\sqrt{1 + \frac{d}{L}} - 1\right)^2.$$

In momentul trecerii locomotivei, piatra se afla la înălţimea:

$$H = h - h_1.$$

Aplicaţie numerică: v_o = 72 km/h; L = 1oo m; d = 1o m.
Rezultă: s_1 = 1oo m; a = o,2 m/s^2; H = 375 m.

Problema 37

Avînd la dispoziţie un cîntar, o targă de lemn, o nivelă cu bulă de aer şi o riglă gradată să se determine coordonatele centrului de greutate al omului.

Rezolvare

Materiale necesare: cîntar; targa de lemn cu lungimea de aproximativ 2 m; nivelă cu bulă de aer pentru verificat orizontalitatea tărgii; riglă gradată.

Targa de lemn este sprijinită cu un capăt pe cîntar şi cu celălalt capăt pe un bloc de lemn cu înălţime reglabilă, în scopul realizării orizontalităţii tărgii în timpul lucrului, aşa cum indică desenul din figura I.55.

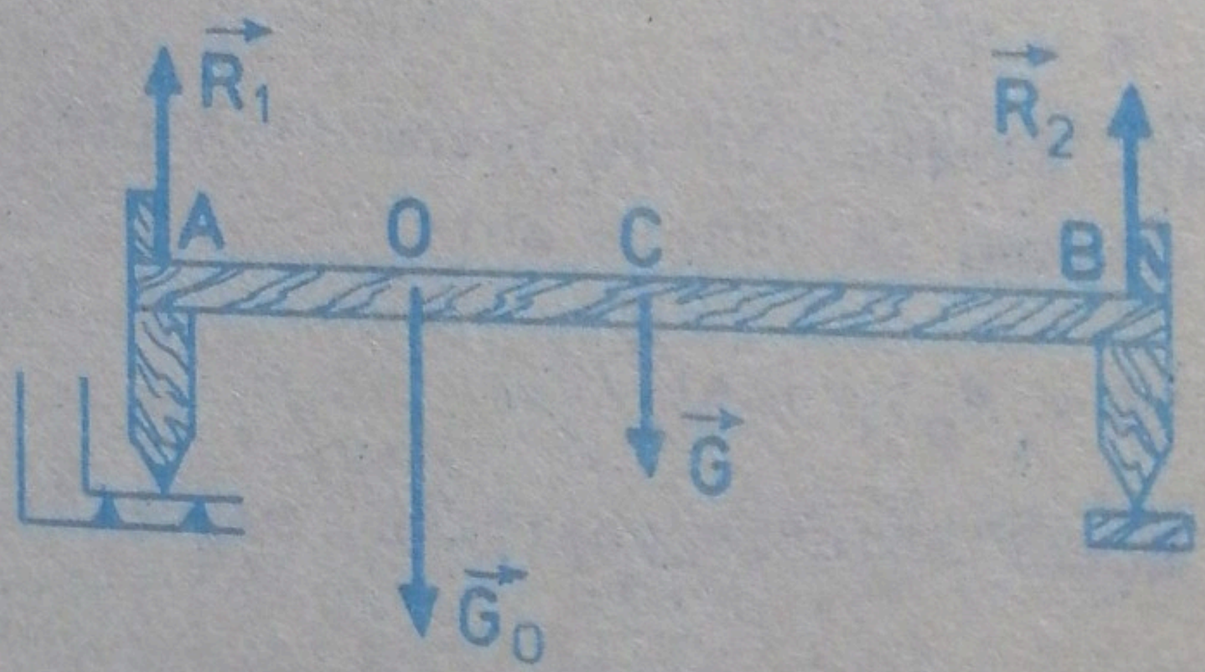


Figura I.55

a) Determinarea înălţimii z a centrului de greutate deasupra solului

1) Se determină greutatea G_o a subiectului.

2) Se citeşte indicaţia cîntarului cînd targa se sprijină-

nă cu un capăt pe aceasta şi cu celălalt pe blocul de lemn, targa fiind goală şi perfect orizontală. Blocul de lemn trebuie să aibă o înălţime reglabilă pentru a permite realizarea orizontalităţii tărgii în timpul lucrului. Punctele de sprijin ale capetelor tărgii trebuie să fie suficient de ascuţite, iar centrul de greutate al tărgii trebuie să fie la mijlocul lungimii sale. In acest caz indicaţia cîntarului reprezintă jumătate din greutatea tărgii, adică G/2.

3) Se aşază subiectul pe targă în poziţie culcat, cu capul spre cîntar, în aşa fel încît tălpile să fie în contact cu rezemătoarea de la capătul opus al tărgii. Picioarele trebuie să fie perfect întinse, mîinile întinse pe lîngă corp şi targa perfect orizontală. Se citeşte indicaţia cîntarului şi se notează cu R_1.

4) Se măsoară cu rigla distanţa dintre muchiile de sprijin şi se notează cu L.

Se constată că asupra tărgii acţionează următoarele forţe:

$\vec{G}$ = greutatea tărgii;

$\vec{G}_o$ = greutatea omului;

$\vec{R}_1$; $\vec{R}_2$ = reacţiile celor două reazime.

Condiţiile de echilibru pentru targă sînt:

$$\vec{G} + \vec{G}_o + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = o;$$

$$(\vec{M}_{\vec{G}} + \vec{M}_{\vec{G}_o} + \vec{M}_{\vec{R}_1} + \vec{M}_{\vec{R}_2})_B = o.$$

Notaţii:

A şi B, proiecţiile în planul orizontal al tărgii ale punctelor de sprijin;

O şi C proiecţiile în planul orizontal al tărgii, al centrului de greutate al omului şi respectiv al centrului de greutate al tărgii;

AB = L, lungimea tărgii măsurată între cele două puncte de sprijin;

CB = L/2;

OB = z, înălţimea centrului de greutate al omului faţă de sol, atunci cînd acesta stă în poziţie verticală.

$$\vec{OB} \times \vec{G}_o + \vec{CB} \times \vec{G} + \vec{AB} \times \vec{R}_1 = o;$$

$$G_o OB + G\ CB = R_1 AB;$$

$$G_o z + G\ \frac{L}{2} = R_1 L;$$

$$z = \frac{L(R_1 - \frac{G}{2})}{G_o}.$$

b) Determinarea coordonatelor (x;Y) ale proiecţiei centrului de greutate în planul orizontal al tărgii

1) Se păstrează citirile de la punctul a) şi anume valorile notate pentru G_o şi G/2.

2) Se aşază subiectul în poziţie verticală, cu faţa spre cîntar, aşezîndu-i sub picioare o hîrtie pe care trasăm conturul tălpilor, aşa cum indică desenul din figura I.56. Se asigură poziţia orizontală a tărgii. Se citeşte indicaţia cîntarului şi se notează cu R_1.

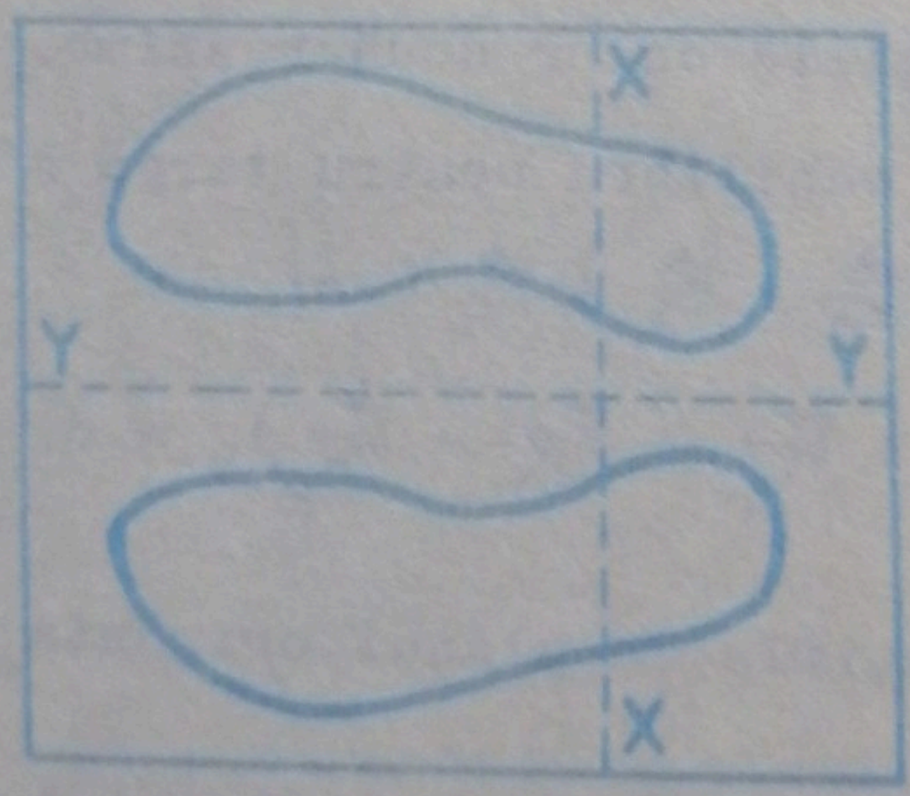


Figura I.56

3) Pentru calculul lui x, măsurat de la capătul B spre capătul A se foloseşte relaţia cunoscută:

$$x = \frac{L(R_1' - \frac{G}{2})}{G_o}.$$

4) Se însemnează pe foaia de hîrtie, în stînga şi în dreapta subiectului, coordonata x măsurată cu rigla faţă de B. Se unesc cu o linie cele două notaţii xx.

5) Se aşază subiectul în poziţie verticală, în aşa fel încît în stînga sa să se afle cîntarul, menţinînd poziţia tălpilor pe conturul trasat anterior. Se citeşte indicaţia R'' arătată de cîntar în noua poziţie.

6) Pentru calculul lui y, măsurat faţă de capătul B se foloseşte relaţia:

$$y = \frac{L(R_1'' - G/2)}{G_o}.$$

7) Se însemnează pe foaia de hîrtie, în stînga şi în dreapta subiectului, coordonata y măsurată faţă de B. Se unesc cu o dreaptă cele două notaţii yy.

Intersecţia dreptelor xx şi yy reprezintă proiecţia în plarul orizontal a centrului de greutate al omului.

Problema 38

Un avion execută în plan vertical un looping de rază R, cu viteza constantă v_o.

1) In ce punct al traiectoriei a căzut din avion un corp, dacă traiectoria sa a intersectat cercul în punctul său cel mai de jos?

2) După cît timp avionul va trece din nou prin punctul inferior al loopingului?

3) Stiind că avionul a ajuns în punctul superior al loopingului în momentul în care corpul căzut din el ajungea în punctul inferior, să se calculeze noua viteză a avionului, socotită din momentul căderii corpului. Raza cercului se consideră constantă.

Rezolvare

1) In momentul desprinderii corpului din avion, el are viteza $\vec{v}_o$ faţă de sol, tangentă la cercul care constituie traiectoria avionului, aşa cum indică desenul din figura I.57.

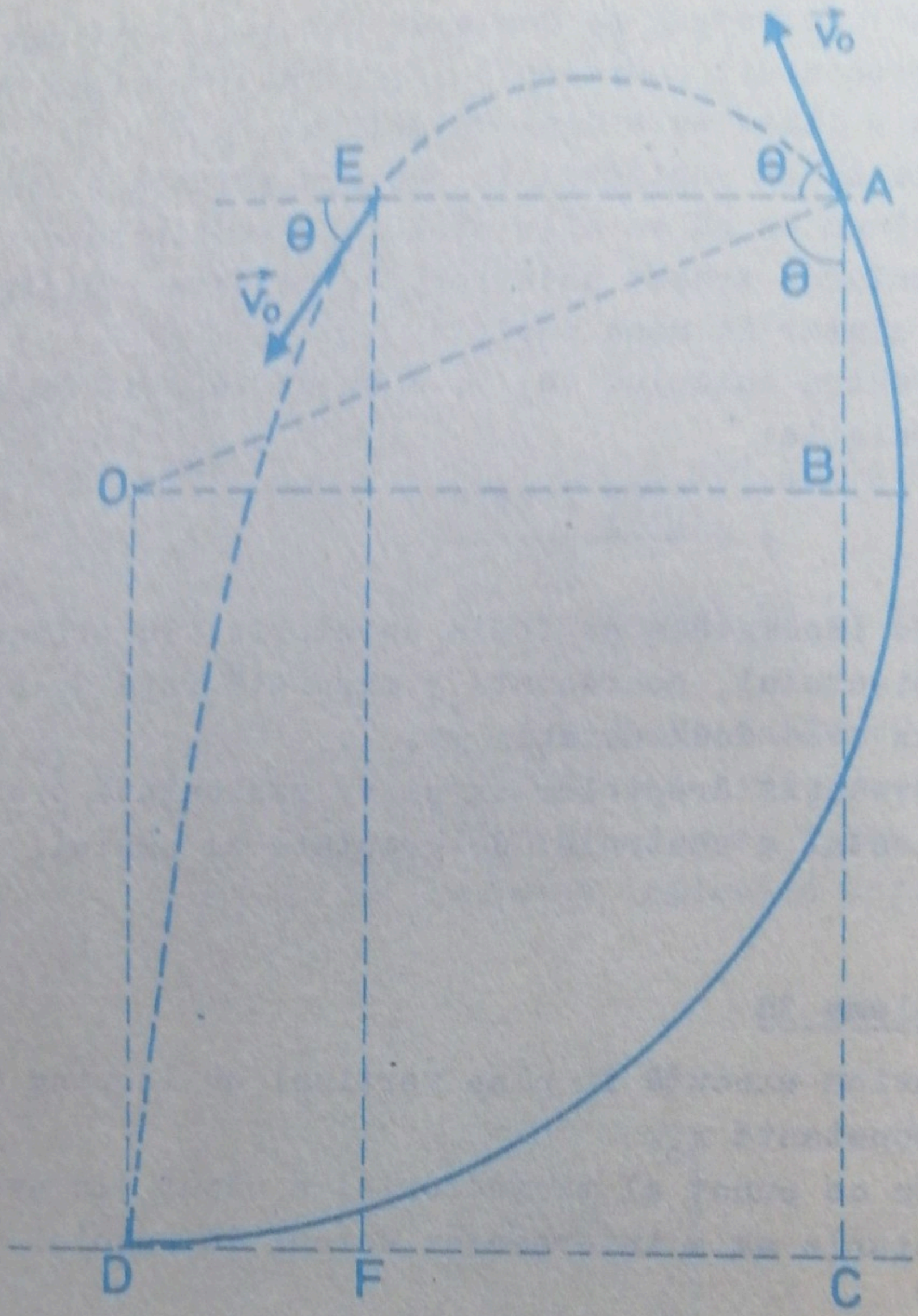


Figura I.57

$$X = CD = CF + FD = x_{max} + x;$$

$$X = R\sin\theta;$$

$$x_{max} = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g};$$

$$x = v_o t_c \cos\theta;$$

$$H = AC = AB + BC = R\cos\theta + R = R(1 + \cos\theta);$$

$$H = v_o t_c \sin\theta + g t_c^2/2;$$

$$gt_o^2/2 + v_o t_o \sin\theta = R(1 + \cos\theta);$$

$$gt_o^2 + 2v_o \sin\theta t_o - 2R(1 + \cos\theta) = 0;$$

$$t_o = \frac{-v_o \sin\theta + \sqrt{v_o^2 \sin^2\theta + 2gR(1 + \cos\theta)}}{g};$$

$$x_{max} + x = R\sin\theta;$$

$$v_o \cos\theta \frac{\sqrt{v_o^2 \sin^2\theta + 2gR(1 + \cos\theta)} - v_o \sin\theta}{g} +$$

$$+ \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g} = R\sin\theta;$$

$$R\sin\theta - \frac{v_o^2 2\sin\theta\cos\theta}{g} + \frac{v_o^2 \sin\theta\cos\theta}{g} =$$

$$= \frac{v_o \cos\theta}{g} \sqrt{v_o^2 \sin^2\theta + 2gR(1 + \cos\theta)};$$

$$R\sin\theta - \frac{v_o^2 \sin\theta\cos\theta}{g} =$$

$$= \frac{v_o \cos\theta}{g} \sqrt{v_o^2 \sin^2\theta + 2gR(1 + \cos\theta)}.$$

După ridicarea la pătrat a acestei expresii, obţinem:

$$gR\sin^2\theta = 2v_o^2 \cos\theta(\sin^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta);$$

$$(2v_o^2 + gR)\cos^2\theta + 2v_o^2 \cos\theta - gR = 0;$$

$$\cos\theta = \frac{gR}{2v_o^2 + gR};$$

$$H = R\left(1 + \frac{gR}{2v_o^2 + gR}\right).$$

2) Din punctul A pînă în punctul D avionul are de parcurs arcul:

$$S = R(\pi + \theta);$$

$$S = v_o t.$$

Rezultă:

$$t = \frac{R(\pi + \theta)}{v_o}.$$

3) Din punctul A şi pînă în punctul superior al loopingului avionul are de parcurs arcul:

$$S_1 = R\theta.$$

Durata parcurgerii acestui arc de către avion este egală cu durata mişcării corpului din momentul desprinderii din avion şi pînă în momentul atingerii punctului inferior al loopingului.

Rezultă:

$$S_1 = v_1 T;$$

$$T = 2\frac{v_o \sin\theta}{g} + t_c;$$

$$v_1 = R\theta/T.$$

Problema 39

Un corp cu masa M cade liber în vid de la înălţimea h.

1) Cu ce forţă trebuie să acţionăm asupra corpului, la 1 s după începerea mişcării, pentru ca acesta să atingă solul cu viteza pe care o căpătase pînă în acel moment?

2) Cu ce forţă trebuie acţionat asupra corpului, pe distanţa ultimului metru, pentru ca acesta să atingă solul cu viteza zero?

Rezolvare

1) După 1 s de la începerea căderii viteza corpului este:

$$v = gt = 10 \text{ m/s}.$$

Pentru a atinge solul cu viteza aceasta, trebuie acţionat asupra corpului cu o forţă egală cu greutatea corpului, dar de sens contrar. In acest fel, conform principiului inerţiei, dacă rezultanta forţelor ce acţionează asupra unui corp este zero,

atunci mişcarea acestuia este rectilinie şi uniformă.

2) Inainte de parcurgerea ultimului metru, viteza corpului este:

$$v_o = \sqrt{2g(h - 1m)}.$$

Ecuaţia vitezei corpului în momentul atingerii solului este:

$$v^2 = v_o^2 - 2ah_1 = o;$$

$$a = \frac{v_o^2}{2h_1} = \frac{g(h - 1m)}{h_1} = \frac{g(h - 1m)}{1m}.$$

Pe distanţa $h_1 = 1m$ mişcarea corpului este uniform încetinită. De aceea forţa necesară va trebui să echilibreze atît greutatea corpului, cît şi forţa de inerţie.

Rezultă:

$$\vec{F}_t = - (\vec{G} + \vec{F}_i);$$

$$F_t = M(g + a).$$

Problema 4o

Din virful unui plan cu înclinaţia Θ_1 faţă de orizontală se lansează un corp cu viteza iniţială $\vec{v}_o$, sub unghiul Θ_2 faţă de suprafaţa planului înclinat, spre baza planului înclinat. Să se determine:

1) distanţa de la punctul de lansare pînă la punctul de cădere, considerat pe planul înclinat;

2) pentru ce valoare a lui Θ_2 această distanţă este maximă.

Rezolvare

1)

Metoda I

Din desenul reprezentat în figura I.58 rezultă:

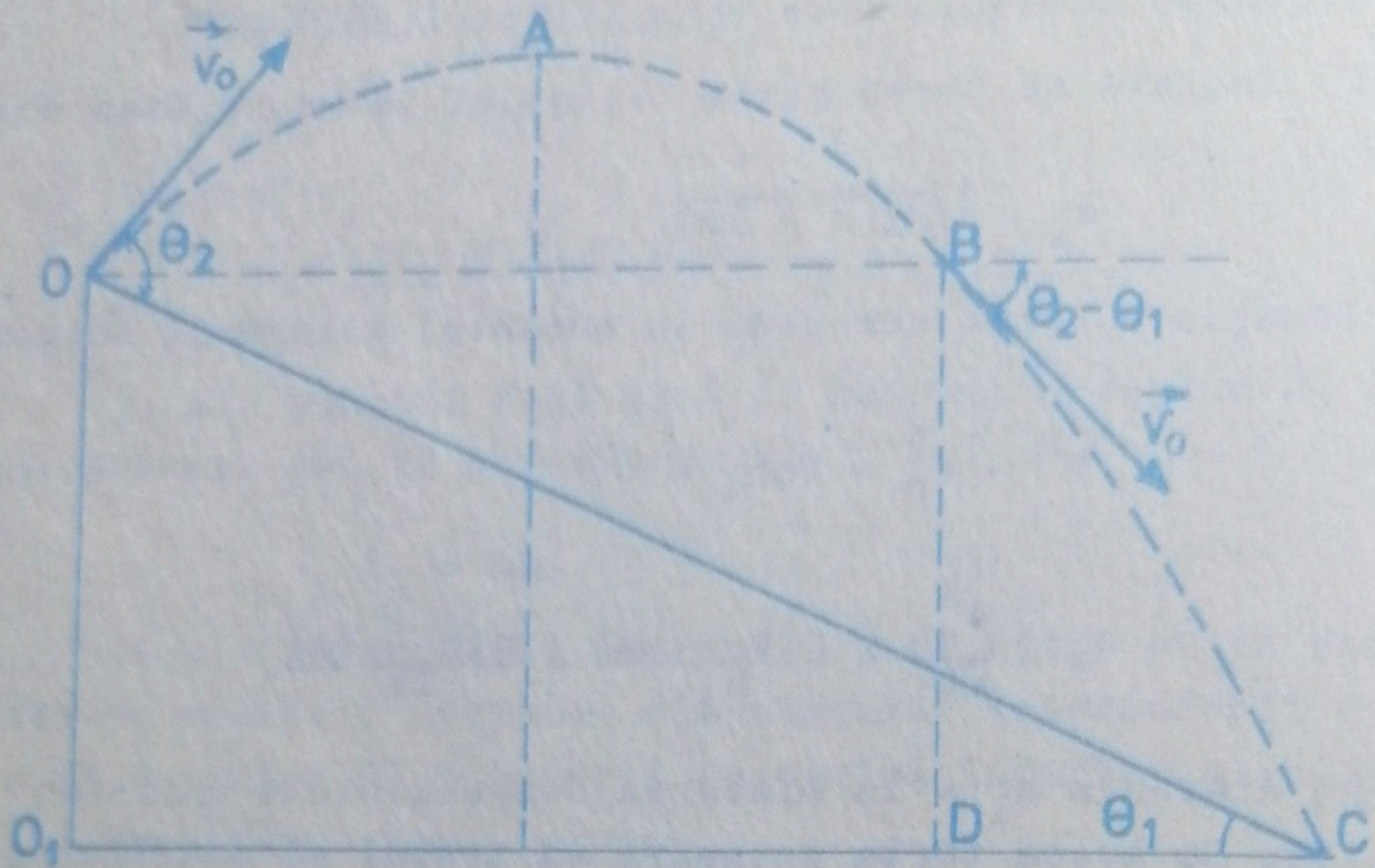


Figura I.58

$$OC = X;$$

$$CO_1 = DO_1 + DC;$$

$$x_{max} + x = X\cos\theta_1;$$

$$x_{max} = \frac{v_o^2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1)}{g};$$

$$x = v_o \cos(\theta_2 - \theta_1) t_c;$$

$$BD = OO_1 = y = X\sin\theta_1;$$

$$y = v_o \sin(\theta_2 - \theta_1) t_c + g t_c^2/2;$$

$$g t_c^2 + 2 v_o \sin(\theta_2 - \theta_1) t_c - 2X\sin\theta_1 = 0;$$

$$t_c = \frac{-v_o \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sqrt{v_o^2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1) + 2gX\sin\theta_1}}{g};$$

$$\frac{v_o^2 \sin 2(\theta_2-\theta_1)}{g} + v_o\cos(\theta_2-\theta_1)\,\frac{-v_o\sin(\theta_2-\theta_1)}{g} +$$

$$+ v_o\cos(\theta_2-\theta_1)\,\frac{\sqrt{v_o^2\sin^2(\theta_2-\theta_1) + 2gX\sin\theta_1}}{g} =$$

$$= X\cos\theta_1;$$

$$X\cos\theta_1 - 2\,\frac{v_o^2\sin(\theta_2-\theta_1)(\cos(\theta_2-\theta_1))}{g} +$$

$$+ \frac{v_o^2\sin(\theta_2-\theta_1)\cos(\theta_2-\theta_1)}{g} =$$

$$= \frac{v_o}{g}\cos(\theta_2-\theta_1)\sqrt{v_o^2\sin^2(\theta_2-\theta_1) + 2gX\sin\theta_1}.$$

După reducerea termenilor asemenea şi ridicarea la pătrat se obţine:

$$X = \frac{2v_o^2\sin\theta_2}{g\cos^2\theta_1}\cos(\theta_2-\theta_1);$$

$$X = \frac{2v_o^2\sin\theta_2}{g\cos^2\theta_1}(\cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_2\sin\theta_1);$$

$$X = \frac{v_o^2\sin 2\theta_2}{g\cos\theta_1})1 + tg\theta_1 tg\theta_2).$$

Metoda II

Desenul din figura I.59 reprezintă desenul din figura I.58 rotit în jurul punctului C, în sens direct trigonometric cu unghiul θ_1. In acest fel planul înclinat a devenit un plan orizontal.

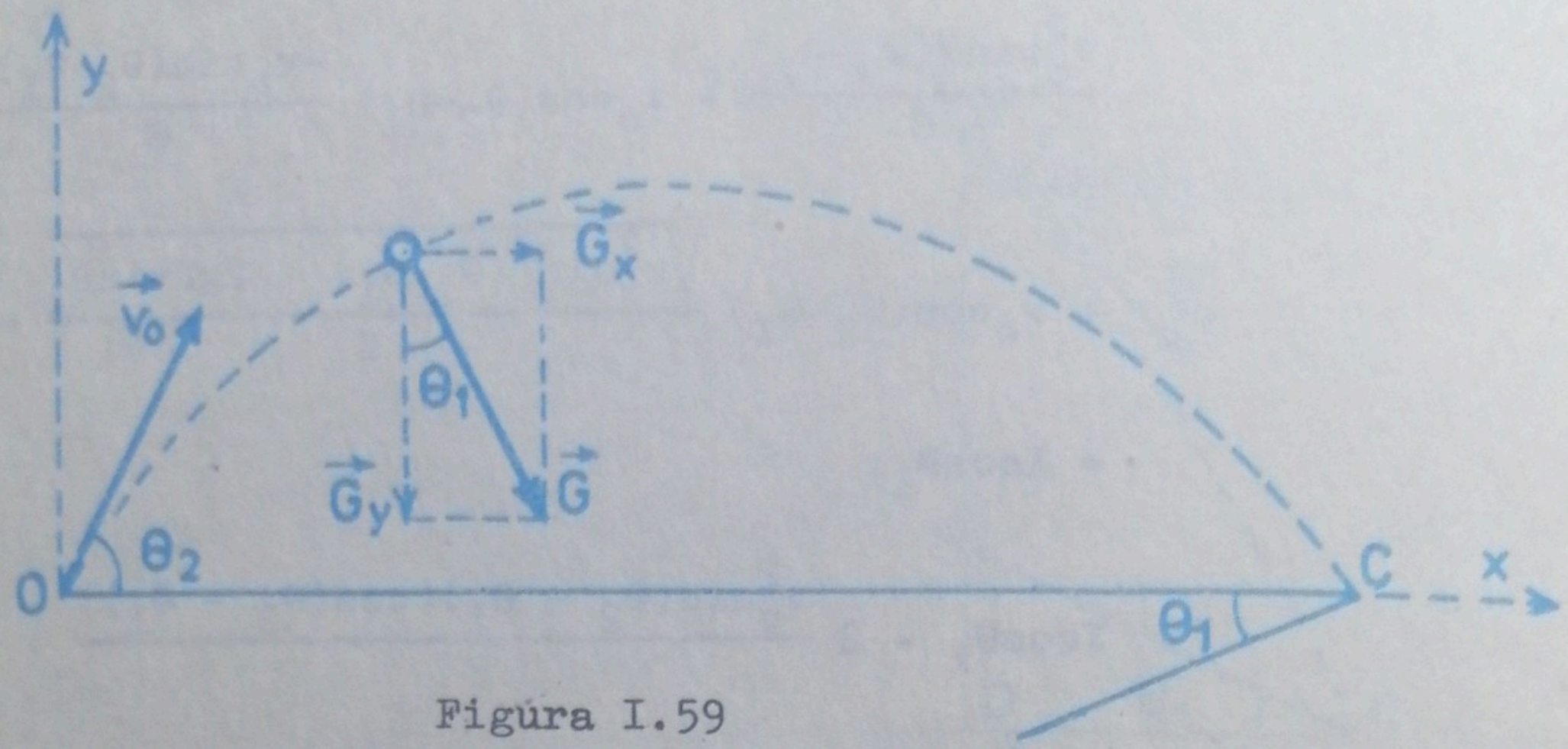


Figura I.59

Să observăm că rotirea sistemului determină şi rotirea vectorului care reprezintă greutatea corpului. Acest vector se poate descompune astfel:

$$\vec{G} = \vec{G}_x + \vec{G}_y.$$

Componenta $\vec{G}_x$ îi imprimă corpului o mişcare uniform accelerată în lungul axei Ox:

$$G_x = ma_x;$$

$$G_x = mg\sin\theta_1;$$

$$a_x = g\sin\theta_1;$$

$$v_x = v_o\cos\theta_2 + gt\sin\theta_1;$$

$$x = v_o t\cos\theta_2 + \frac{gt^2\sin\theta_1}{2}.$$

Componenta $\vec{G}_y$ îi imprimă corpului o mişcare uniform încetinită în lungul axei Oy pînă în punctul curespunzător înălţimii maxime şi apoi o mişcare uniform accelerată pînă în momentul revenirii pe sol:

$$G_y = ma_y;$$

$$G_y = mg\cos\theta_1;$$

$$a_y = g\cos\theta_1;$$

$$v_y = v_o\sin\theta_2 - gt\cos\theta_1;$$

$$y = v_o t\sin\theta_2 - \frac{gt^2\cos\theta_1}{2}.$$

Pentru punctul corespunzător înălţimii maxime, avem:

$$o = v_o\sin\theta_2 - gt_u\cos\theta_1;$$

$$t_u = v_o\sin\theta_2/g\cos\theta_1 = t_c.$$

Valoarea lui X se obţine din formula lui x, în care lui t îi dăm valoarea: $t = 2t_u$.

Rezultă:

$$X = v_o\cos\theta_2 \frac{2v_o\sin\theta_2}{g\cos\theta_1} + \frac{g\sin\theta_1}{2} 4 \frac{v_o^2\sin^2\theta_2}{g^2\cos^2\theta_1};$$

$$X = \frac{2v_o^2\sin\theta_2\cos\theta_2}{g\cos\theta_1}(1 + \frac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2});$$

$$X = \frac{v_o^2\sin 2\theta_2}{g\cos\theta_1}(1 + tg\theta_1 tg\theta_2).$$

Metoda III

Să alegem un sistem de referinţă xOy, aşa cum este reprezentat în desenul din figura I.6o.

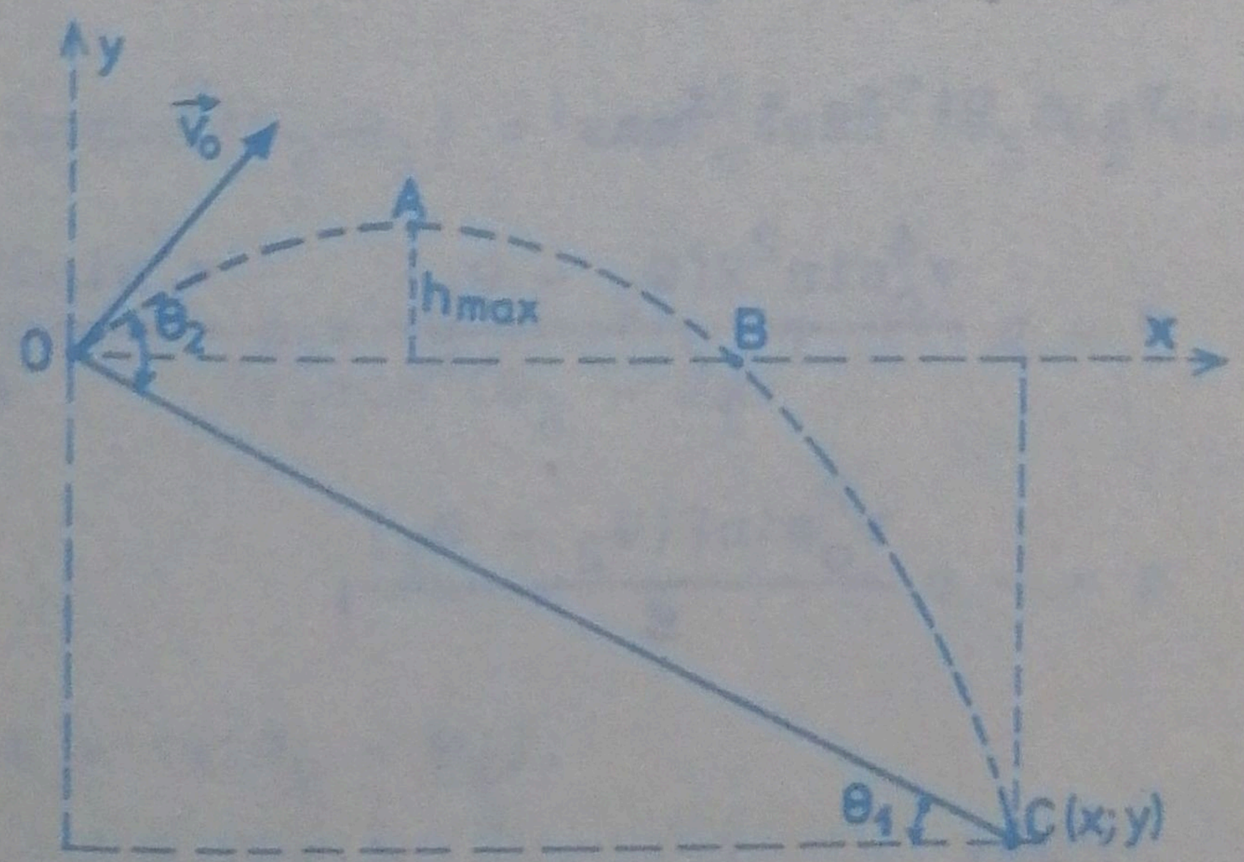


Figura I.6o

In planul xOy trebuie căutat punctul C(x;y) unde corpul loveşte solul.

$$tg\theta_1 = -y/x;$$

$$y = -x\ tg\theta_1.$$

Traiectoria corpului fiind o parabolă, ea va trebui să satisfacă o ecuaţie de forma:

$$y = px^2 + qx.$$

Rezultă:

$$-xtg\theta_1 = px^2 + qx;$$

$$x = -\frac{q + tg\theta_1}{p};$$

$$X = OC = \frac{x}{\cos\theta_1} = -\frac{q + tg\theta_1}{p\cos\theta_1}.$$

Pentru determinarea constantelor p şi q să scriem că ecuaţia parabolei este verificată de coordonatele a două puncte cunoscute (A şi B).

$$B(x_{max};\ o);$$

$$x_{max} = \frac{v_o^2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1)}{g};$$

$$y_B = px_B^2 + qx_B;$$

$$y_B = o;\ x_B = x_{max};$$

$$o = p\frac{v_o^4 \sin^2 2(\theta_2 - \theta_1)}{g^2} + q\frac{v_o^2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1)}{g};$$

$$q = -p\frac{v_o^2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1)}{g};$$

$$A(\frac{x_{max}}{2};\ h_{max});$$

$$h_{max} = \frac{v_o^2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1)}{2g};$$

$$y_A = px_A^2 + qx_A;$$

$$y_A = h_{max};\ x_A = \frac{x_{max}}{2};$$

$$\frac{v_o^2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1)}{2g} = p\,\frac{v_o^4 \sin^2 2(\theta_2 - \theta_1)}{4g^2} +$$

$$+ q\,\frac{v_o^2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1)}{2g};$$

$$\sin^2(\theta_2 - \theta_1) = p\,\frac{v_o^2 \sin^2 2(\theta_2 - \theta_1)}{2g} +$$

$$+ q \sin 2(\theta_2 - \theta_1);$$

$$\sin^2(\theta_2 - \theta_1) = p\,\frac{v_o^2 \sin^2 2(\theta_2 - \theta_1)}{2g} -$$

$$- p\,\frac{v_o^2 \sin^2 2(\theta_2 - \theta_1)}{g};$$

$$\sin^2(\theta_2 - \theta_1) = -\,p\,\frac{v_o^2 \sin^2 2(\theta_2 - \theta_1)}{2g};$$

$$2g\sin^2(\theta_2 - \theta_1) = -\,pv_o^2 4\sin^2(\theta_2 - \theta_1)\cos^2(\theta_2 - \theta_1);$$

$$p = -\,\frac{g}{2v_o^2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)};$$

$$q = tg(\theta_2 - \theta_1).$$

Introducînd expresiile lui p şi q în X rezultă:

$$X = -\frac{tg(\theta_2 - \theta_1) + tg\theta_1}{\frac{-g\cos\theta_1}{2v_o^2\cos^2(\theta_2 - \theta_1)}};$$

$$X = \frac{2v_o^2\cos^2(\theta_2 - \theta_1)\left\{tg(\theta_2 - \theta_1) + tg\theta_1\right\}}{g\cos\theta_1}$$

$$X = \frac{2v_o^2\cos^2(\theta_2-\theta_1)}{g\cos\theta_1}\,\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)+tg\theta_1\cos(\theta_2-\theta_1)}{\cos(\theta_2 - \theta_1)};$$

$$X = \frac{2v_o^2\cos(\theta_2 - \theta_1)}{g\cos\theta_1}\,\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)\cos\theta_1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_1}{\cos\theta_1};$$

$$X = \frac{2v_o^2\cos(\theta_2 - \theta_1)}{g\cos^2\theta_1}\sin\theta_2;$$

$$X = \frac{2v_o^2\sin\theta_2}{g\cos^2\theta_1}(\cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_2\sin\theta_1);$$

$$X = \frac{2v_o^2\sin\theta_2}{g\cos^2\theta_1}\cos\theta_2\cos\theta_1(1 + \frac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2});$$

$$X = \frac{v_o^2\sin 2\theta_2}{g\cos\theta_1}(1 + tg\theta_1 tg\theta_2).$$

Ecuaţia traiectoriei devine:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_o^2\cos^2(\theta_2 - \theta_1)} + x\,tg(\theta_2 - \theta_1).$$

Caz particular: $\theta_1 = o$.

Rezultă:

$$X = \frac{v_o^2\sin 2\theta_2}{g}.$$

2) Calculăm prima derivată a lui X înraport cu θ_2 şi apoi o anulăm. Rezultă:

$$\frac{dX}{d\theta_2} = \frac{v_o^2}{g\cos\theta_1}\left\{2\cos 2\theta_2\ (1 + tg\theta_1 tg\theta_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin 2\theta_2 tg\theta_1}{\cos^2\theta_2}\right\} = 0;$$

$$2\cos 2\theta_2\ (1 + tg\theta_1 tg\theta_2) + \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_2 tg\theta_1}{\cos^2\theta_2} = 0;$$

$$2\cos 2\theta_2\ (1 + tg\theta_1 tg\theta_2) + 2tg\theta_1 tg\theta_2 = 0;$$

$$2\cos 2\theta_2 + 2tg\theta_1 tg\theta_2\ (1 + \cos 2\theta_2) = 0;$$

$$\cos 2\theta_2 + tg\theta_1 tg\theta_2 2\cos^2\theta_2 = 0;$$

$$\cos 2\theta_2 + tg\theta_1 \sin 2\theta_2 = 0;$$

$$ctg 2\theta_2 = - tg\theta_1;$$

$$ctg 2\theta_2 = ctg(90^o + \theta_1);$$

$$2\theta_2 = 90^o + \theta_1;$$

$$\theta_2 = 45^o + \theta_1/2.$$

Problema 41

De la baza unui plan înclinat cu unghiul θ_1 faţă de orizontală se lansează cu viteza iniţială v_o, un corp, sub unghiul θ_2 faţă de suprafaţa planului înclinat. Să se determine:

1) distanţa de la punctul de lansare pînă la punctul de cădere, considerat pe planul înclinat;

2) pentru ce valoare a lui θ_2 această distanţă este maximă.

Rezolvare

1)

Metoda I

Din desenul reprezentat în figura I.61 rezultă:

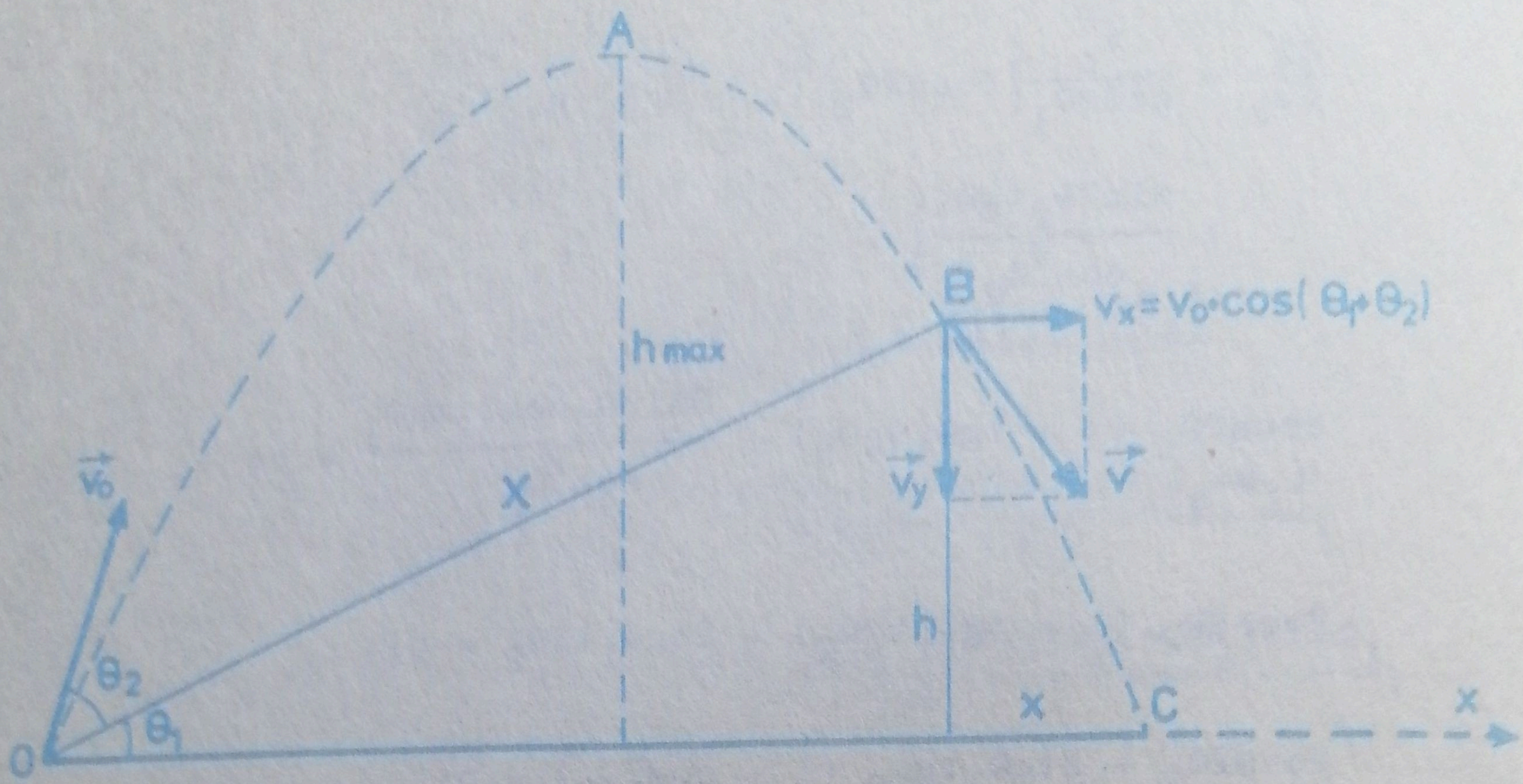


Figura I.61

OB = X;

BD = h;

OD = OC - CD;

$X\cos\theta_1 = x_{max} - x;$

$$x_{max} = \frac{v_o^2 \sin 2(\theta_1 + \theta_2)}{g};$$

$h = X\sin\theta_1;$

$$h_{max} = \frac{v_o^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2)}{2g};$$

$h = v_y t_c + g t_c^2/2;$

$v_y = \sqrt{2g(h_{max} - X\sin\theta_1)};$

$g t_c^2 + 2\sqrt{2g(h_{max} - X\sin\theta_1)}\, t_c - 2X\sin\theta_1 = o;$

$$t_c = \frac{v_o \sin(\theta_1+\theta_2) - \sqrt{v_o^2 \sin^2(\theta_1+\theta_2) - 2gX\sin\theta_1}}{g};$$

$$CD = x = v_o t_c \cos(\theta_1 + \theta_2);$$

$$X\cos\theta_1 = \frac{v_o^2 \sin 2(\theta_1 + \theta_2)}{g} - \frac{v_o^2 \sin(\theta_1 + \theta_2)}{g} +$$

$$+ \frac{v_o}{g}\cos(\theta_1+\theta_2)\sqrt{v_o^2 \sin^2(\theta_1+\theta_2) - 2gX\sin\theta_1};$$

$$X\cos\theta_1 - \frac{v_o^2 \sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 + \theta_2)}{g} =$$

$$= \frac{v_o}{g}\cos(\theta_1 + \theta_2)\sqrt{v_o^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) - 2gX\sin\theta_1}.$$

După ridicarea la pătrat a acestei expresii, rezultă:

$$X = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_2}{g\cos\theta_1}(1 - tg\theta_1 tg\theta_2).$$

Metoda II

Desenul din figura I.62 reprezintă desenul din figura I.61 rotit în jurul punctului O, în sens direct trigonometric, cu unghiul θ_1. In acest fel planul înclinat a devenit un plan orizontal.

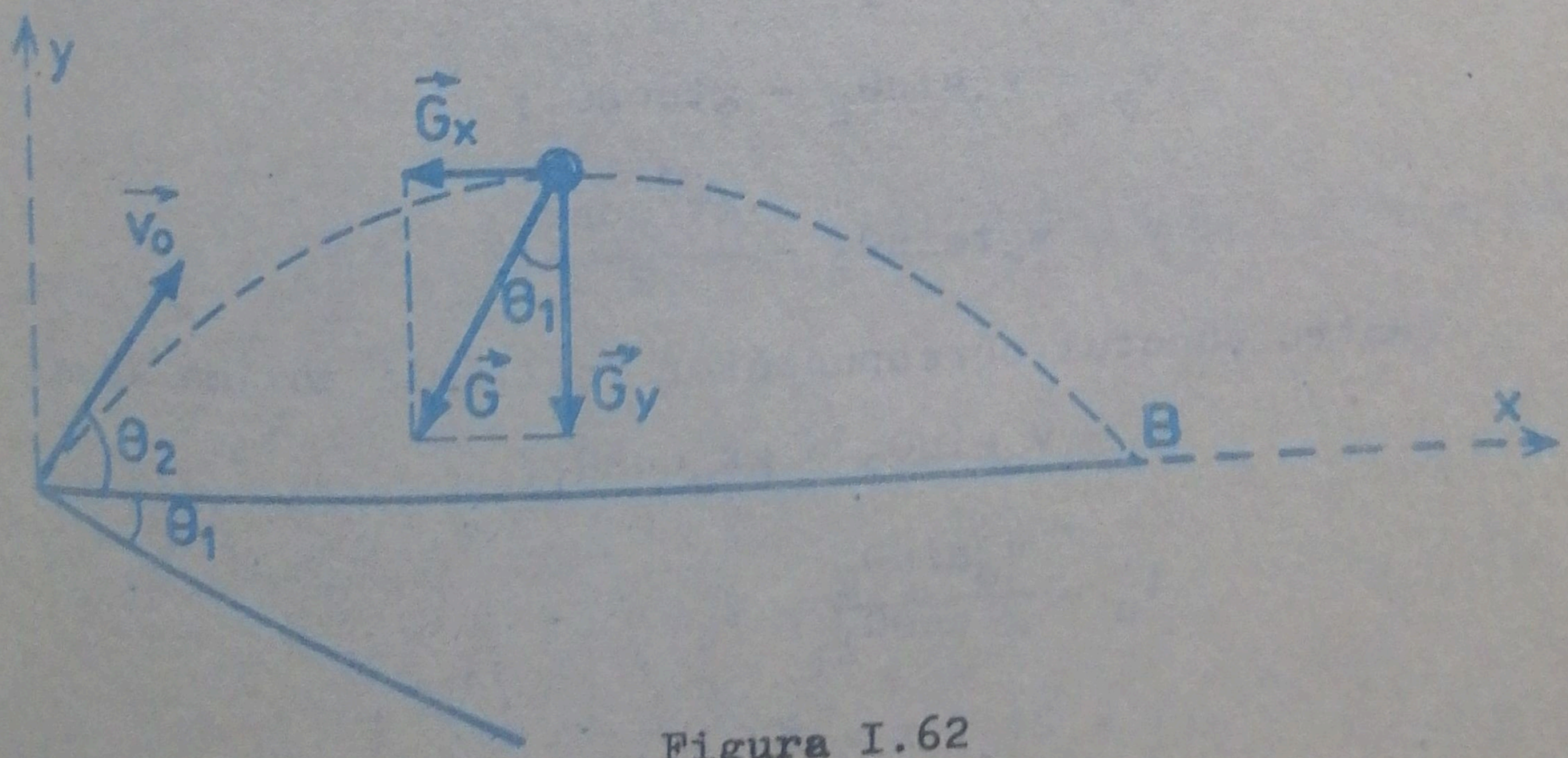


Figura I.62

In noul sistem de coordonate, greutatea nu mai este un vector pe direcţie verticală, ci este un vector înclinat cu unghiul θ_1 spre stînga. Se poate face descompunerea:

$$\vec{G} = \vec{G}_x + \vec{G}_y.$$

Componenta $\vec{G}_x$, opunîndu-se deplasării corpului, îi imprimă acestuia o mişcare uniform încetinită:

$$G_x = ma_x;$$

$$G_x = mg\sin\theta_1;$$

$$a_x = g\sin\theta_1;$$

$$v_x = v_o\cos\theta_2 - gt\sin\theta_1;$$

$$x = v_o t\cos\theta_2 - \frac{gt^2\sin\theta_1}{2}.$$

Componenta $\vec{G}_y$ mai întîi obligă corpul să se deplaseze uniform încetinit pînă în punctul corespunzător înălţimii maxime, unde se anulează componenta vitezei paralelă cu axa Oy, pentru ca apoi să oblige corpul să se deplaseze uniform accelerat:

$$G_y = ma_y;$$

$$G_y = mg\cos\theta_2;$$

$$a_y = g\cos\theta_1;$$

$$v_y = v_o\sin\theta_2 - gt\cos\theta_1;$$

$$y = v_o t\sin\theta_2 - \frac{gt^2\cos\theta_1}{2}.$$

Pentru punctul corespunzător înălţimii maxime avem:

$$o = v_o\sin\theta_2 - gt_u\cos\theta_1;$$

$$t_u = \frac{v_o\sin\theta_2}{g\cos\theta_1} = t_c;$$

$$t = 2t_u;\ x = X;$$

$$X = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_2}{g\cos\theta_1}(1 - \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2).$$

Metoda III

Să ne alegem un sistem de referinţă xOy aşa cum indică desenul din figura I.63.

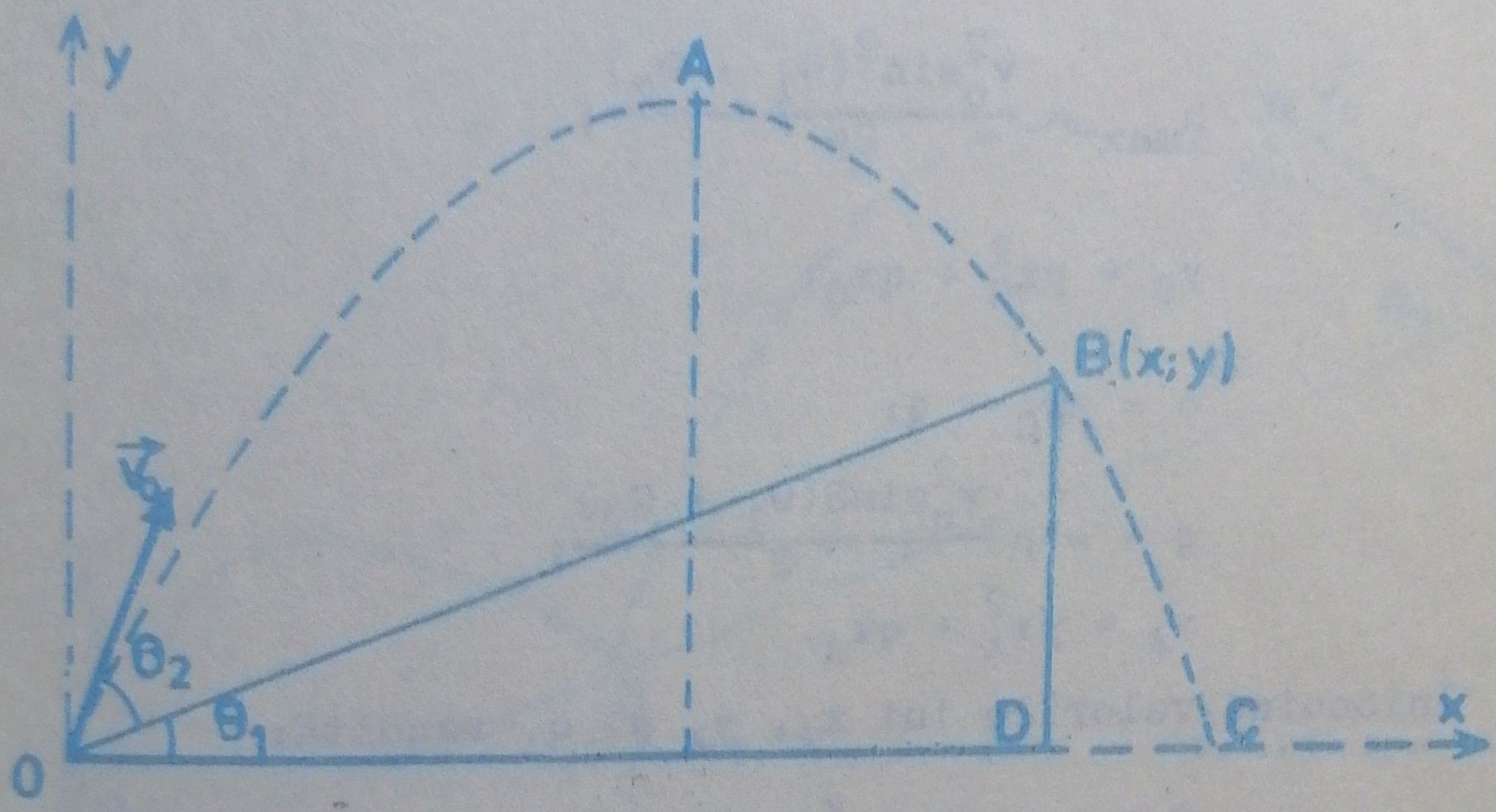


Figura I.63

$$\operatorname{tg}\theta_1 = y/x;$$

$$y = x \operatorname{tg}\theta_1.$$

Traiectoria fiind o parabolă care trece prin origine, ecuaţia ei este de forma:

$$y = px^2 + qx.$$

Rezultă:

$$x \operatorname{tg}\theta_1 = px^2 + qx;$$

$$x = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 - q}{p};$$

$$x = X\cos\theta_1;$$

$$X = \frac{tg\theta_1 - q}{p\cos\theta_1}.$$

Ecuaţia parabolei este verificată de coordonatele punctelor A şi C.

$$A(\frac{x_{max}}{2};\ h_{max});\ C(x_{max};\ o);$$

$$x_{max} = \frac{v_o^2 \sin 2(\theta_1 + \theta_2)}{g};$$

$$h_{max} = \frac{v_o^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2)}{2g};$$

$$y_C = px_C^2 + qx_C;$$

$$o = px_C + q;$$

$$q = - p\,\frac{v_o^2 \sin 2(\theta_1 + \theta_2)}{2};$$

$$y_A = px_A^2 + qx_A.$$

Înlocuind valorile lui x_A, y_A şi q, rezultă:

$$p = - \frac{g}{2v_o^2\cos^2(\theta_1 + \theta_2)};\quad q = tg(\theta_1 + \theta_2);$$

$$X = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_2}{g\cos\theta_1}(1 - tg\theta_1 tg\theta_2).$$

2) Pentru calculul valorii unghiului θ_2, necesar parcurgerii unei distanţe maxime pe planul înclinat, anulăm derivata lui X în raport cu θ_2.

Rezultă:

$$\theta_2 = 45^\circ - \theta_1/2.$$

Problema 42

De la baza şi din vîrful unui plan cu înclinaţia θ_1 faţă de orizontală, a cărui înălţime este h, se lansează, unul spre

celălalt, două corpuri identice , cu viteza v_o, sub unghiuri egale faţă de suprafaţa planului înclinat.

1) Pentru ce valoare a unghiului de lansare, cele două corpuri au căzut în acelaşi punct pe planul înclinat?

2) Să se calculeze viteza ansamblului obţinut prin ciocnirea plastică a corpurilor.

Rezolvare

Urmărind desenul din figura I.64 şi folosind rezultatele din problemele 4o şi 41, rezultă:

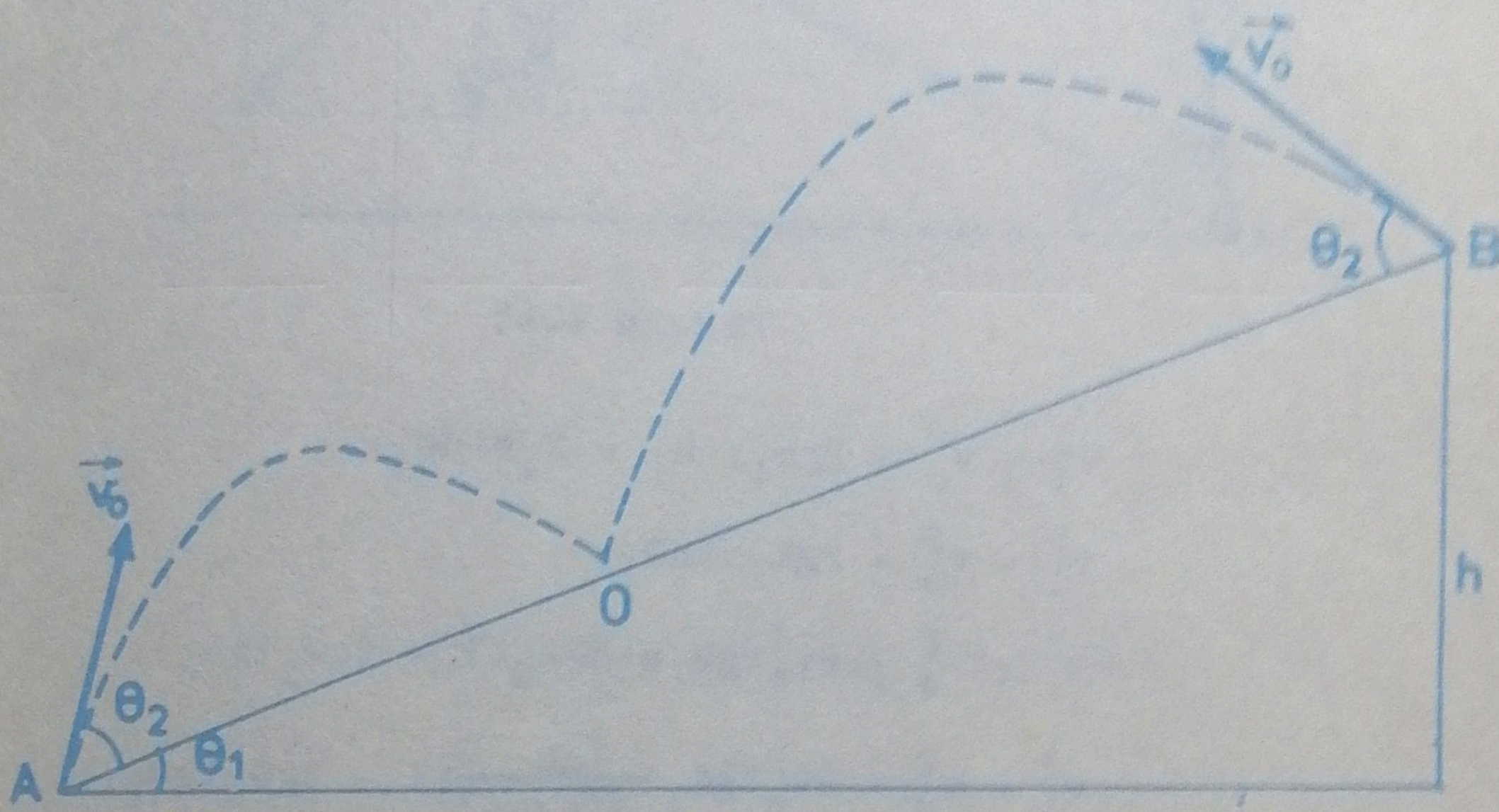


Figura I.64

$$AO = X_1 = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_2}{g\cos\theta_1}(1 - tg\theta_1 tg\theta_2);$$

$$BO = X_2 = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_2}{g\cos\theta_1}(1 + tg\theta_1 tg\theta_2);$$

$$X_1 + X_2 = h/\sin\theta_1;$$

$$\frac{2v_o^2 \sin 2\theta_2}{g\cos\theta_1}\sin\theta_1 = h;$$

$$\sin 2\theta_2 = \frac{gh}{2v_o^2 tg\theta_1}.$$

2) Din desenul reprezentat în figura I.65 şi din legea transformării şi conservării energiei mecanice, rezultă:

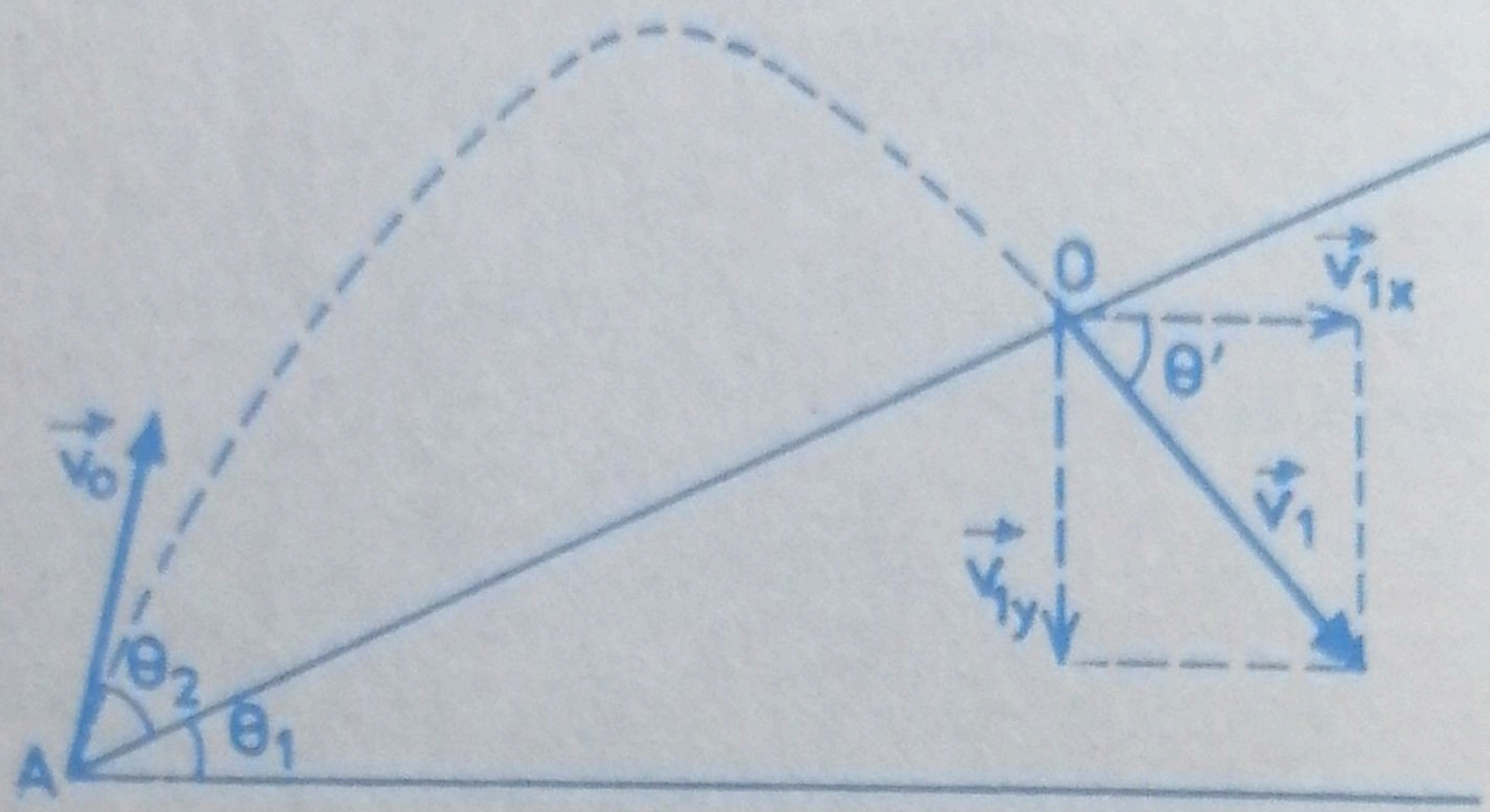


Figura I.65

$$v_1^2 = v_o^2 - 2gh_1;\ h_1 = X_1 \sin\theta_1;$$

$$v_1^2 = v_o^2 - 2gX_1 \sin\theta_1;$$

$$v_1^2 = v_o^2 - 2v_o^2 tg\theta_1 \sin 2\theta_2 (1 - tg\theta_1 tg\theta_2);$$

$$v_1^2 = v_o^2 - 2v_o^2 tg\theta_1 \frac{gh}{2v_o^2 tg\theta_1}(1 - tg\theta_1 tg\theta_2);$$

$$v_1^2 = v_o^2 - gh(1 - tg\theta_1 tg\theta_2);$$

$$v_1 = \sqrt{v_o^2 - gh(1 - tg\theta_1 tg\theta_2)};$$

$$v_{1x} = v_o \cos(\theta_1 + \theta_2);$$

$$\cos\theta' = v_{1x}/v_1 = \frac{v_o \cos(\theta_1+\theta_2)}{\sqrt{v_o^2 - gh(1 - tg\theta_1 tg\theta_2)}}$$

Din desenul reprezentat în figura I.66 şi din legea conservării energiei mecanice rezultă:

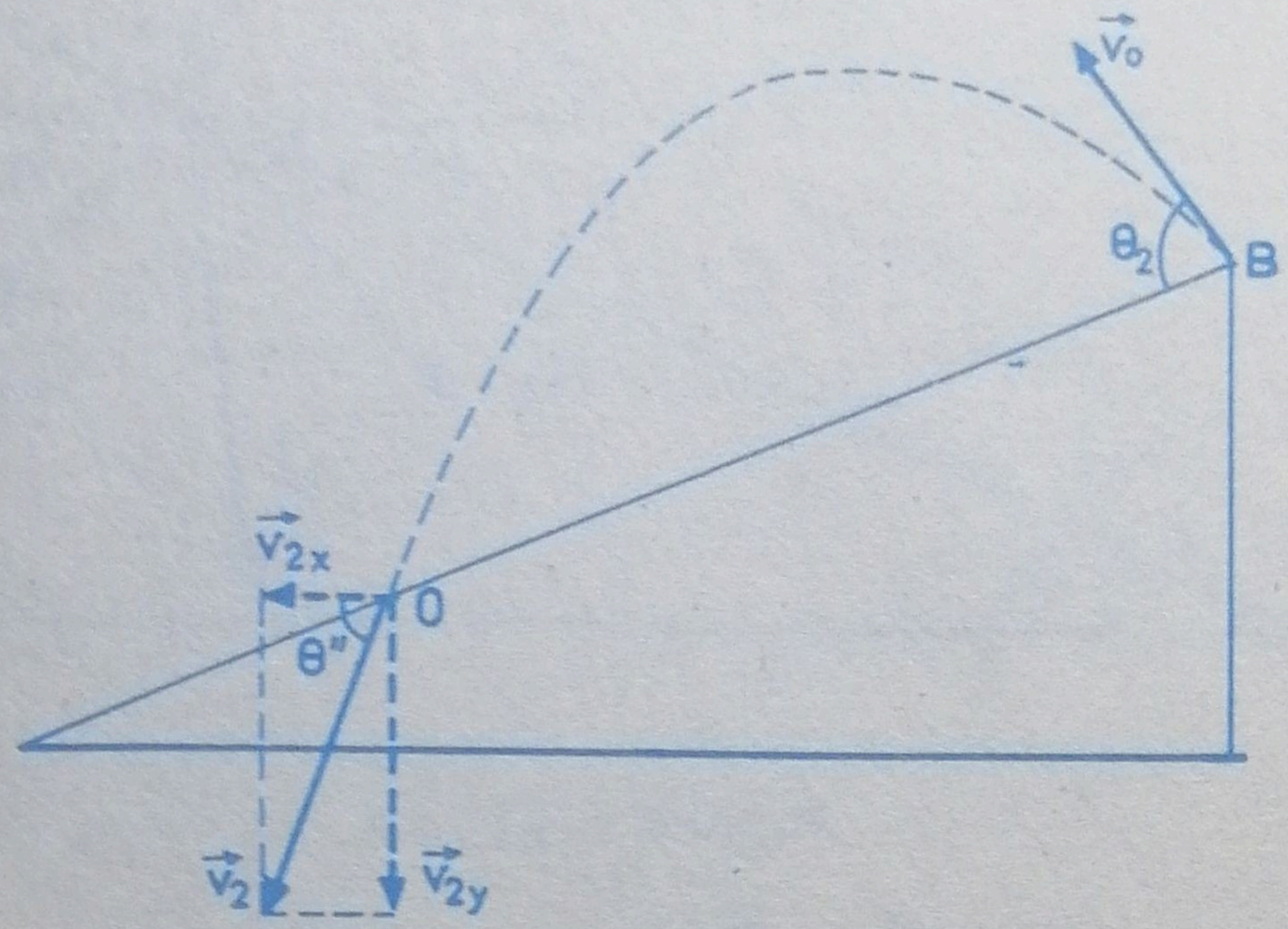


Figura I.66

$$v_2^2 = v_o^2 + 2gh; \quad h_2 = X_2 \sin\theta_1;$$

$$v_2^2 = v_o^2 + 2gX_2 \sin\theta_1;$$

$$v_2^2 = v_o^2 + 2gh \frac{v_o^2 \, tg\theta_1}{2v_o^2 tg\theta_1}(1 + tg\theta_1 tg\theta_2);$$

$$v_2 = \sqrt{v_o^2 + gh(1 + tg\theta_1 tg\theta_2)};$$

$$v_{2x} = v_o \cos(\theta_2 - \theta_1);$$

$$\cos\theta'' = v_{2x}/v_2 = \frac{v_o \cos(\theta_2 - \theta_1)}{\sqrt{v_o^2 + gh(1 + tg\theta_1 tg\theta_2)}}.$$

Din desenul prezentat în figura I.67 şi din legea conservării impulsului mecanic, rezultă:

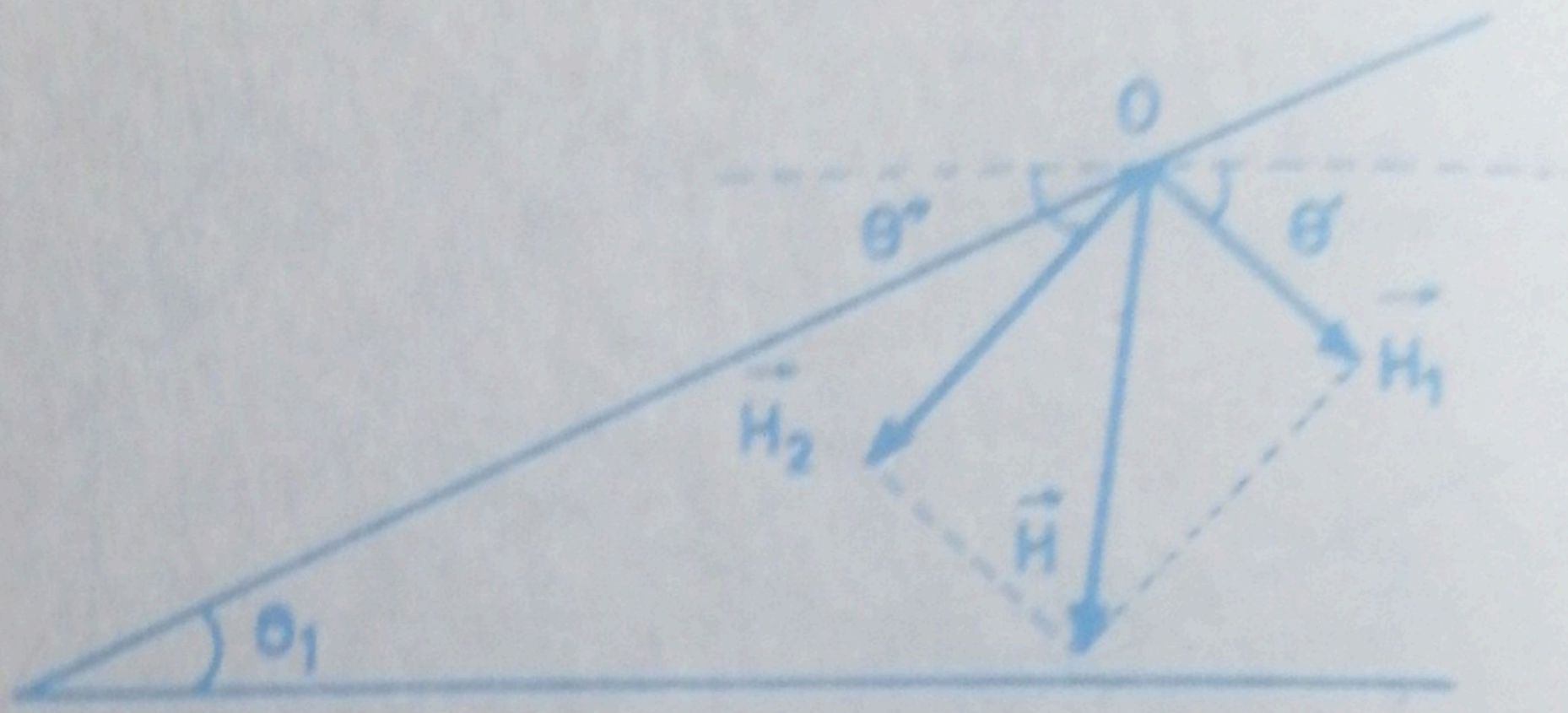


Figura I.67

$$\vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{H};$$

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2 + 2H_1H_2\cos(180^\circ - (\theta' + \theta''));$$

$$4m^2v^2 = m^2v_1^2 + m^2v_2^2 - 2m^2v_1v_2\sin(\theta' + \theta'');$$

$$v = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\sin(\theta' + \theta'')}}{2}.$$

Problema 43

De la înălţimea h a unui plan cu înclinaţia θ faţă de orizontală, se aruncă orizontal pe plan un corp cu viteza iniţială $\vec{v}_o$.

1) Să se scrie ecuaţia traiectoriei corpului.

2) Cu ce viteză şi sub ce unghi ajunge corpul la baza pantei?

3) Ce distanţă a parcurs corpul pe orizontală? Se neglijează frecările.

Rezolvare

1) Desenul din figura I.68 permite studiul mişcării corpului în raport cu sistemul xOy.

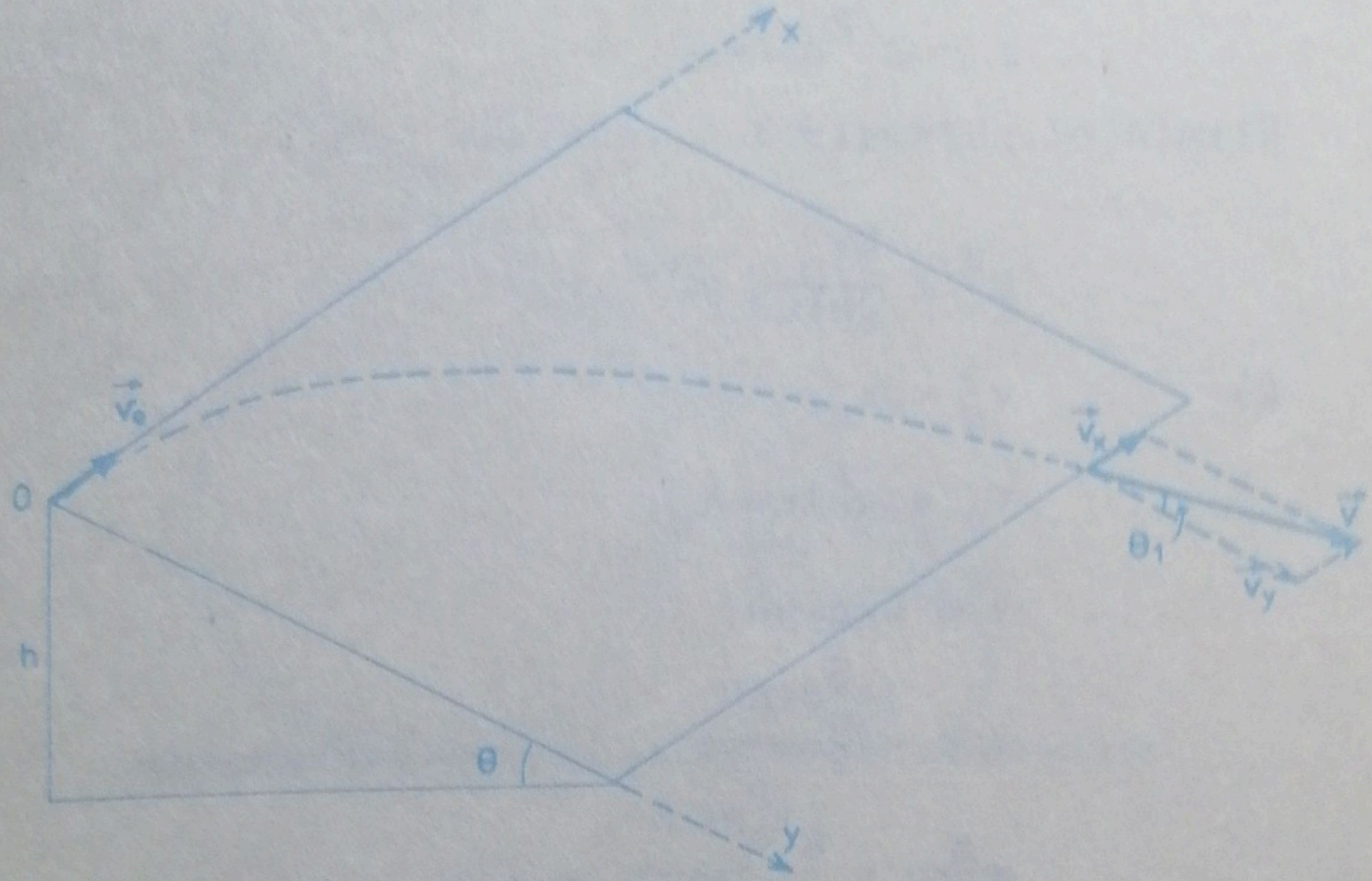


Figura I.68

Mişcarea proiecţiei corpului în lungul axei Ox este uniformă şi poate fi caracterizată prin următoarele ecuaţii:

$$v_x = v_o;$$

$$x = v_o t;$$

$$F_x = o;\ a_x = o.$$

Mişcarea proiecţiei în lungul axei Oy este uniform accelerată şi poate fi caracterizată prin următoarele ecuaţii:

$$v_y = a_y t;$$

$$a_y = g\sin\theta;$$

$$y = a_y t^2/2;$$

$$F_y = ma_y;$$

$$F_y = G_t = mg\sin\theta.$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sînt:

$$x = v_{ot};$$

$$y = gt^2 \sin\theta/2.$$

Eliminînd parametrul t rezultă:

$$x^2 = \frac{2v_o^2}{g\sin\theta}\, y.$$

2) $v_x = v_o$;

$v_y = g\sin\theta\ t_c$;

$y = h/\sin\theta$;

$$y = \frac{gt_c^2\sin\theta}{2};$$

$$\frac{h}{\sin\theta} = \frac{g t_c^2 \sin\theta}{2};$$

$$t_c = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2};$$

$tg\theta_1 = v_x/v_y$;

$$tg\theta_1 = \frac{v_o}{\sqrt{2gh}}.$$

3) $X = v_o t_c$;

$$X = \frac{v_o}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Problema 44

Pe cele două role cilindrice, cu raze diferite, reprezentate în desenul din figura I.69 este sprijinită o scîndură omogenă, care formează cu orizontala unghiul θ. La momentul iniţial sistemul este în repaus. Eliberînd scîndura şi considerînd că ea nu alunecă pe role, iar rolele se rostogolesc fără alunecare şi neglijînd masele rolelor să se determine acceleraţia centrului de greutate al scîndurii.

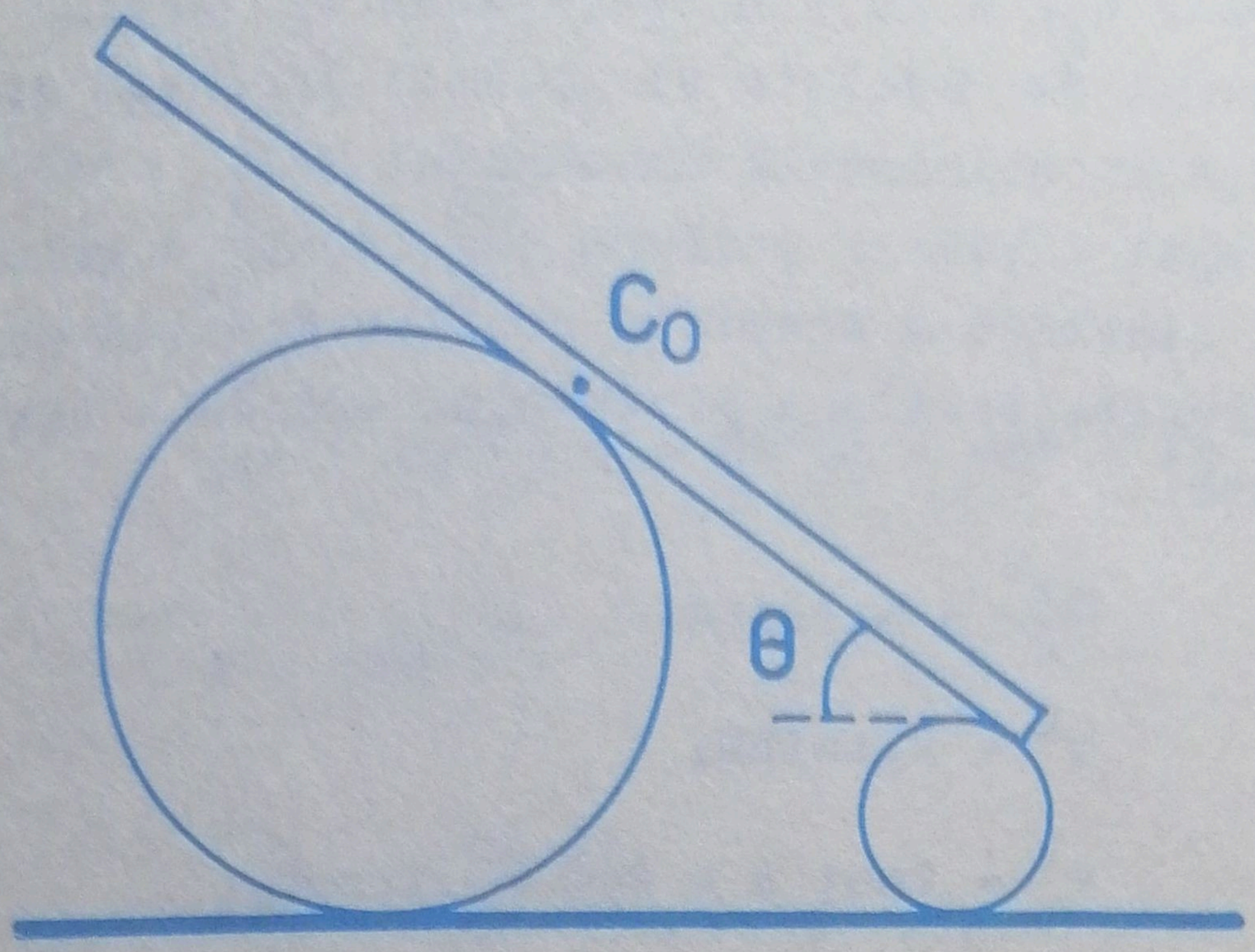


Figura I.69

Rezolvare

Deoarece grinda nu alunecă pe role şi deoarece rolele se rostogolesc fără alunecare distanţa între axele rolelor rămîne constantă în timpul mişcării. Grinda va coborî în lungul tangentei la cele două role, direcţia sa fiind în orice moment paralelă cu direcţia iniţială. aşa cum indică desenul din figura I.7o.

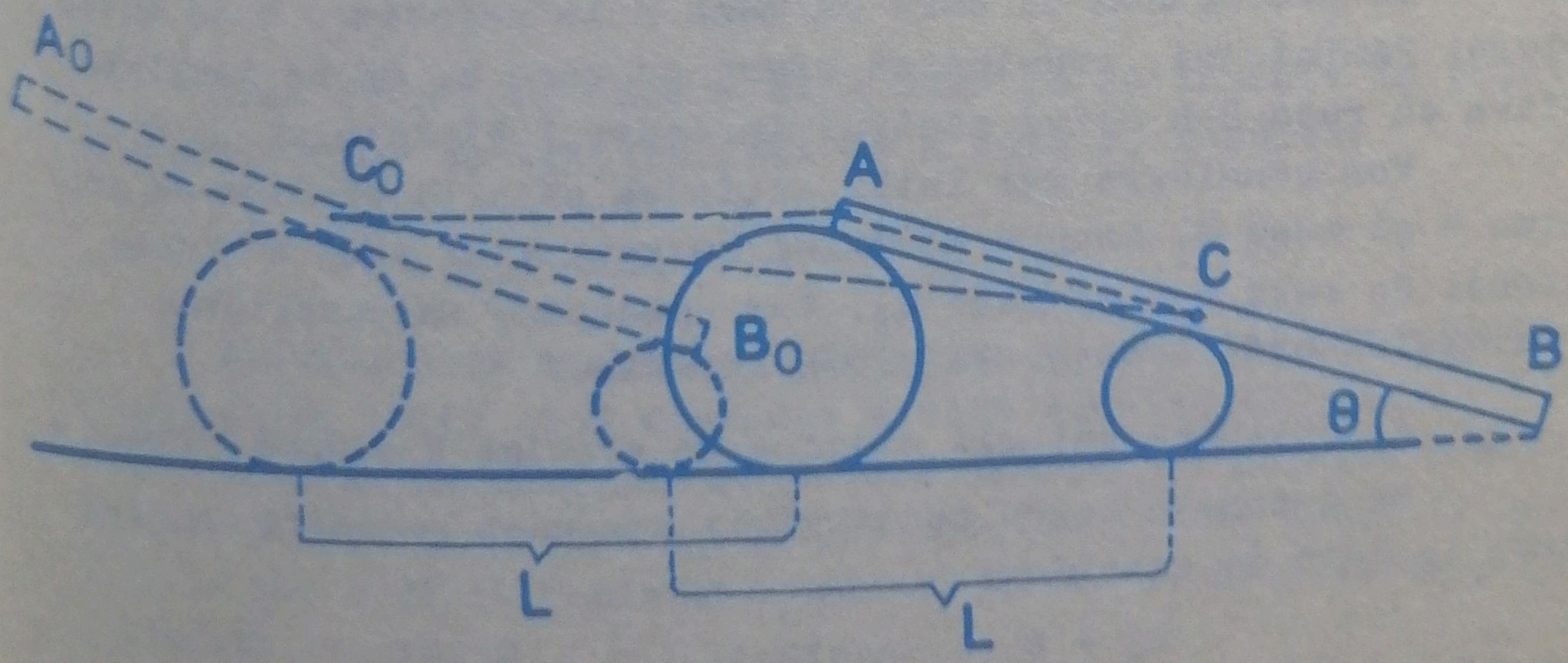


Figura I.7o

Deoarece $C_oA = AC = L$ rezultă că triunghiul C_oAC este isoscel. Centrul de greutate al grinzii parcurge distanţa C_oC, înclinată taţă de orizontală cu unghiul $\theta/2$.

In timpul mişcării uniform accelerate a grinzii, creşterea energiei cinetice a acesteia provine din scăderea energiei potenţiale gravitaţionale a sistemului grindă - Pământ.

Rezultă:

$$\frac{mv^2}{2} = mgL\sin\theta;$$

$$v^2 = 2gL\sin\theta;$$

$$v^2 = 2as;\ s = C_oC = 2L\cos\frac{\theta}{2};$$

$$a = g\sin\frac{\theta}{2}.$$

Problema 45

Să se stabilească expresia matematică a relaţiei care dovedeşte că greutatea unui corp este funcţie de distanţa la centrul Pământului.

Rezolvare

A) VARIATIA GREUTATII CORPURILOR CU ADINCIMEA

Să presupunem un corp cu masa m la adîncimea h în interiorul Pământului, considerat sferă cu raza R. Să ne imaginăm sfera cu raza R-h avînd centrul în centrul Pământului.

Vom considera mai întîi acţiunea păturii sferice de grosime h şi masă M_1 asupra corpului cu masa m şi apoi acţiunea sferei de rază R-h şi masă M_2. Vom presupune că densitatea Pământului este aceeaşi la orice adîncime.

1) Acţiunea păturii sferice de grosime h asupra corpului m

Se cunoaşte legea conservării energiei mecanice în sisteme izolate de exterior:

$$E_c + E_p = \text{constant}.$$

Să calculăm variaţia în timp a acestei expresii:

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = 0.$$

Rezultă:

$$\frac{dE_p}{dt} = -\frac{dE_c}{dt}.$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{m}{2}2v\frac{dv}{dt} = mav = Fv = F\frac{dr}{dt};$$

$$F = kmM/r^2;$$

$$\frac{dE_c}{dt} = k\frac{mM}{r^2}\frac{dr}{dt};$$

$$\frac{dE_p}{dt} = -k\frac{mM}{r^2}\frac{dr}{dt};$$

$$dE_p = -k\frac{mM}{r^2}dr.$$

Prin integrarea acestei expresii se obţine variaţia energiei potenţiale a sistemului (m; M), atunci cînd corpul cu masa m este deplasat din punctul r_1 în punctul r_2.

$$E_p = -kmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = kmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Cînd corpul cu masa m este adus de la infinit în punctul al cărui vector de poziţie faţă de M este $\bar{r}$, rezultă:

$$E_p = kmM/r. \qquad (1)$$

Aceasta este expresia matematică a energiei potenţiale a sistemului (m;M) cînd distanţa dintre acestea este r.

Acum să ne imaginăm că pătura sferică de grosime h este împărţită într-o mulţime de pături sferice foarte subţiri, purtînd pe ele o distribuţie uniformă de masă, cu densitatea pe suprafaţă constantă

Energia potenţială a sistemului format din corpul de masă m şi pătura sferică de grosime h este formată din contribuţia

tuturor păturilor sferice infinit de subţiri.

Considerînd pe rînd acţiunea fiecărei pături infinit de subţiri, vom neglija prezenţa celorlalte, iar în final vom însuma acţiunea tuturor păturilor sferice

Folosind desenul din figura I.71 vom studia influenţa unei pături sferice subţiri de rază R_1, cu condiţia:

$$R - h < R_1 < R,$$

asupra corpului cu masa m aflat în interiorul acestei sfere goale, la distanţa R-h de centru.

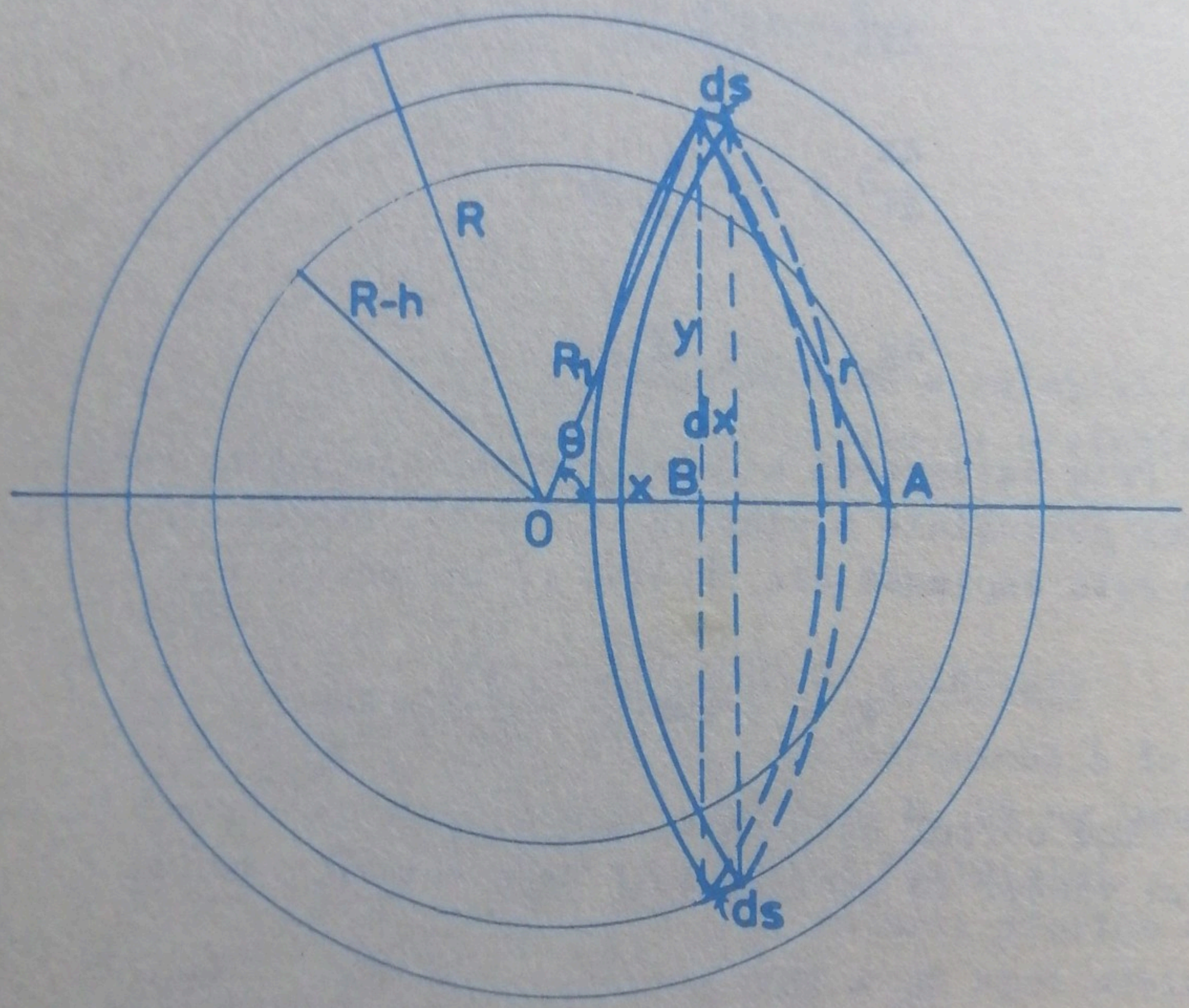


Figura I.71

Energia potenţială a sistemului format din corpul de masă m şi pătura aceasta sferică infinit de subţire este formată din contribuţia tuturor inelelor de grosime dx şi masă dm, astfel alese încît punctele unui astfel de inel să se afle la egală distanţă de corpul m.

Masa unui astfel de inel se poate calcula astfel:

$$dm = 2\pi y \mu ds = 2\pi\mu y \frac{dx}{\sin\theta};$$

$$\sin\theta = y/R_1;$$

$$dm = 2\pi\mu y \frac{dx}{y} R_1 = 2\pi\mu R_1 dx.$$

Dacă dm este masa unui inel de grosime dx, prin integrare după valorile lui x, calculăm masa păturii sferice subţiri de rază R_1. Rezultă:

$$m_1 = \int dm = 2\pi\mu R_1 \int_{-R_1}^{R_1} dx = 4\pi\mu R_1^2. \qquad (2)$$

Conform relaţiei (1) energia potenţială a sistemului format din corpul de masă m şi inelul elementar cu masa dm, este:

$$dE_p^{(1)} = k \frac{m\, dm}{r} \cdot km2\pi\mu R_1 \frac{dx}{r}. \qquad (3)$$

Din geometria figurii I 71 rezultă:

$$r^2 = y^2 + (R - h - x)^2;$$

$$r^2 = y^2 + (R - h)^2 - 2(R - h)x + x^2;$$

$$R_1^2 = x^2 + y^2;$$

$$r^2 = R_1^2 + (R - h)^2 - 2(R - h)x.$$

Prin diferenţierea acestei relaţii rezultă:

$$2r\, dr = -2(R - h)\, dx;$$

$$\frac{dx}{r} = -\frac{dr}{R - h}.$$

Relaţia (3) devine:

$$dE_p^{(1)} = -2\pi\mu\, kmR_1 \frac{dr}{R-h}.$$

Prin integrarea acestei expresii obţinem energia potenţială a sistemului format din corpul m şi întreaga pătură sferică de rază R_1:

$$E_p^{(1)} = \int dE_p^{(1)} = -2\pi\mu\, km \frac{R_1}{R-h} \int_{2R-h}^{h} dr;$$

$$E_p^{(1)} = -2\pi\mu\, km \frac{R_1}{R-h}(h - 2R + h) = 4\pi\mu\, kmR_1.$$

Folosind relaţia (2) putem scrie că:

$$E_p^{(1)} = kmm_1/R_1. \qquad (4)$$

Totul se întîmplă ca şi cum masa m_1 a păturii sferice de rază R_1 ar fi concentrată în centrul Pămîntului. Se observă faptul esenţial că $E_p^{(1)}$ este independent de aşezarea masei m în interiorul sferei goale de rază R_1. Deci, oriunde am deplasa corpul m în interiorul acestei sfere, energia potenţială a sistemului este constantă, adică deplasarea aceasta nu implică efectuarea unui lucru mecanic.

Se ştie că prin deplasarea unui corp între două puncte se va efectua un lucru mecanic numai dacă cele două puncte au potenţiale diferite. Cum în cazul problemei tratate, în interiorul sferei cu raza R_1 potenţialul este constant, însemnează că deplasarea corpului m între două puncte echipotenţiale nu se va petrece cu efectuare de lucru mecanic, adică asupra corpului cu masa m nu va acţiona nici o forţă din partea sferei R_1.

Generalizînd rezultatul de mai sus pentru toate păturile sferice infinit de subţiri, conţinute în pătura sferică de grosime h, găsim valoarea energiei potenţiale a sistemului format din corpul m şi pătura sferică de grosime h.

$$E_p = E_p^{(1)} + E_p^{(2)} + \ldots + E_p^{(n)};$$

$$E_p = km\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} + \ldots + \frac{m_n}{R_n}\right).$$

Utilizînd relaţia (2) rezultă:

$$E_p = 4\pi\mu km(R_1 + R_2 + \ldots + R_n). \qquad (5)$$

Se observă independenţa lui E_p de aşezarea masei m în interiorul păturii sferice de grosime h, deci inexistenaţa unei forţe care să acţioneze asupra corpului m din partea păturii sferice de grosime h şi masă M_1.

2) Acţiunea sferei de rază R-h asupra corpului m

Sfera plină de rază R-h poate fi imaginată ca fiind împărţită într-o infinitate de pături sferice concentrice. Fiecare dintre acestea vor acţiona asupra corpului m aflat în exteriorul lor, ca şi cum masa fiecărei sfere subţiri ar fi concentrată în centrul Pămîntului. Deci problema se reduce la a studia influenţa masei sferei de rază R-h considerată concentrată în centrul Pămîntului, asupra corpului m aflat la distanţa R-h.

Forţa cu care sfera de rază R-h şi masă M_2 atrage corpul cu masa m este dată de legea atracţiei gravitaţionale şi reprezintă chiar greutatea corpului cu masa m aflat la adîncimea h în interiorul Pămîntului:

$$G' = k\frac{mM_2}{(R-h)^2} = km\rho\frac{4\pi}{3}\frac{(R-h)^3}{(R-h)^2};$$

$$G' = \frac{4}{3}\pi\rho km(R-h);$$

$$G' = mg';$$

$$mg' = \frac{4}{3}\pi\rho km(R-h);$$

$$g' = \frac{4}{3}\pi\rho k(R-h);$$

$$K = \frac{4}{3}\pi\rho km;$$

$$G' = K(R-h). \qquad (6)$$

Acceleraţia gravitaţională scade pe măsura apropierii de centrul Pămîntului, deci şi greutatea scade şi se va anula în centrul Pămîntului (h = R).

B) VARIATIA GREUTATII CU ALTITUDINEA

Fie un corp cu masa m aflat la înălţimea h deasupra Pămîntului. In acest caz problema se reduce la a studia influenţa masei Pămîntului asupra corpului cu masa m aflat la distanţa R + h faţă de centrul Pămîntului.

Din legea atracţiei universale rezultă:

$$G'' = k\frac{mM}{(R+h)^2} = \frac{4}{3}\pi\rho\, km\,\frac{R^3}{(R+h)^2};$$

$$G'' = mg'';$$

$$mg'' = \frac{4}{3}\pi\rho\, km\,\frac{R^3}{(R+h)^2};$$

$$g'' = \frac{4}{3}\pi\rho\, k\,\frac{R^3}{(R+h)^2};$$

$$K = \frac{4}{3}\pi\rho\, km;$$

$$G'' = K\frac{R^3}{(R+h)^2}. \qquad (7)$$

Acceleraţia gravitaţională şi greutatea scad atunci cînd altitudinea creşte.

C) GREUTATEA UNUI CORP LA SUPRAFATA PAMINTULUI

$$mg = kmM/R^2;$$

$$g = \frac{4}{3}\pi\rho\, kR;$$

$$G = \frac{4}{3}\pi\rho\, kmR;$$

$$K = \frac{4}{3}\pi\rho\, km;$$

$$G = KR. \qquad (8)$$

In desenul din figura I.72 este reprezentată grafic variaţia greutăţii unui corp în funcţie de distanţa la centrul pămîntului.

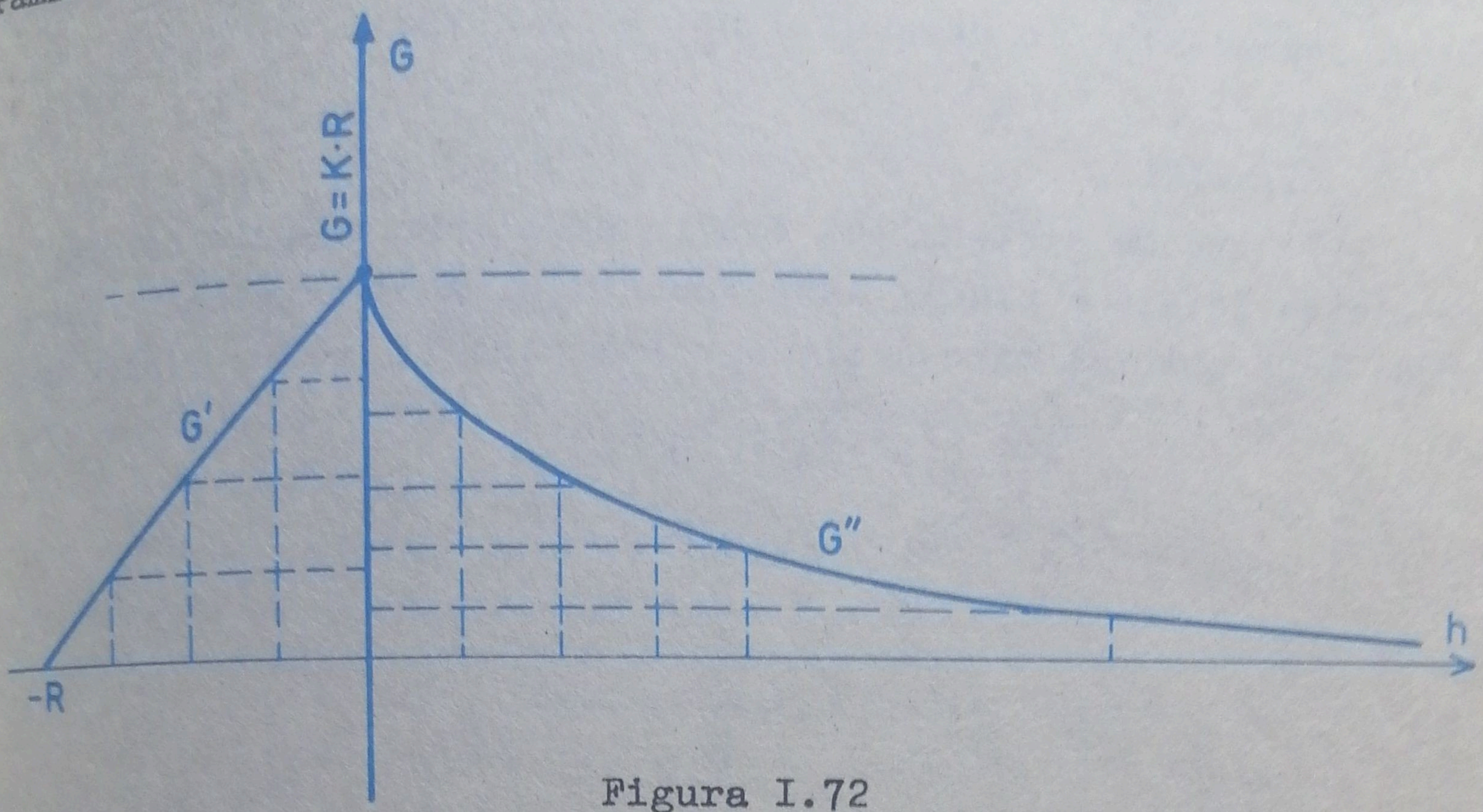


Figura I.72

Porţiunea liniară reprezintă graficul ecuaţiei (6) şi a fost trasată pe baza următorului tabel de date:

h	o	$\frac{R}{4}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R}{4}$	R
G'	KR	$K\frac{3R}{4}$	$K\frac{R}{2}$	$K\frac{R}{4}$	o

Porţiunea neliniară a graficului este o parabolă şi reprezintă graficul ecuaţiei (7). A fost trasat pe baza următorului tabel de date:

h	o	$\frac{R}{4}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R}{4}$	R	2R	∞
G"	KR	o,64KR	o,44KR	o,32KR	o,25KR	o,1KR	o

Graficul trasat reprezintă în acelaşi timp şi variaţia acceleraţiei gravitaţionale în funcţie de distanţa pînă la centrul Pămîntului.

Suprafaţa Pămîntului este o suprafaţă de maxim pentru greutatea corpurilor aflate sub influenţa sa gravitaţională.

Problema 46

Să se arate că numai pentru o singură valoare a lui r şi pentru orice valoare a lui θ este posibil echilibrul sistemului reprezentat în desenul din figura I.73.

Rezolvare

Pentru ca sistemul să fie în echilibru trebuie ca din greutatea totală a plăcii ABED, punctului A să-i revină o sarcină de două ori mai mare decît sarcina care îi revine punctuluiB:

$$F_A = 2F_B;\ F_A + F_B = G;$$

$$F_A = 2G/3;\ F_B = G/3.$$

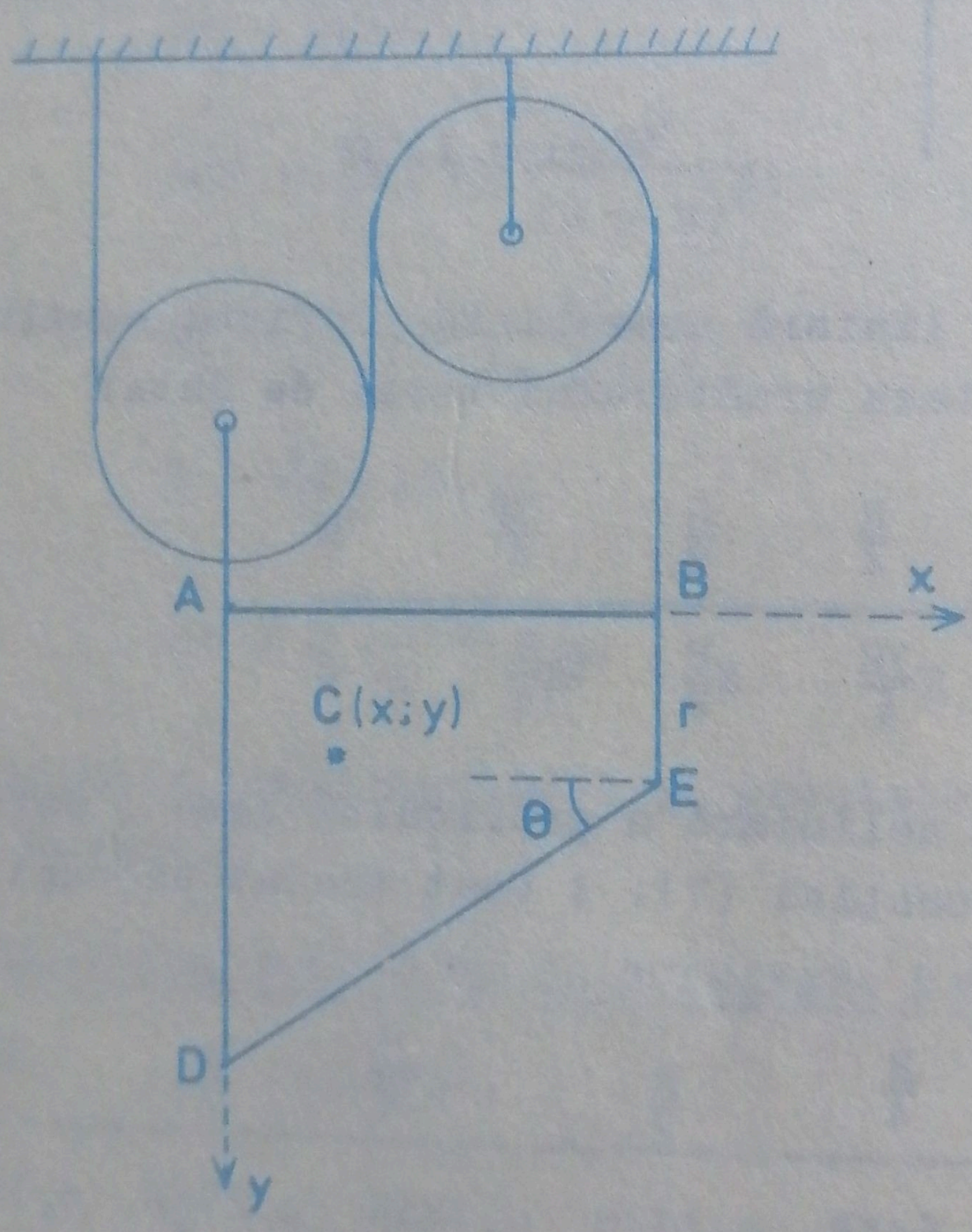


Figura I.73

Pentru ca greutatea totală G să se descompună în două componente paralele ale căror valori să coincidă cu valorile calculate anterior, este necesar ca centrul de greutate al plăcii, C(x; Y), să aibă coordonata x = AB/3 = L/3.

Să calculăm poziţia centrului de greutate al plăcii trapezoidale ABED şi să vedem dacă valoarea coordonatei x este L/3.

Folosim teorema lui Guldin-Pappus:

$$V = 2\pi xS,$$

în care:

S = aria suprafeţei plane ABED;

V = volumul corpului obţinut prin rotirea figurii plane date în jurul unei axe care nu o traversează;

x = distanţa de la centrul de greutate la axa de rotaţie.

Rotind trapezul ABED în jurul laturii AD rezultă un corp de forma celui reprezentat în desenul din figura I.74.

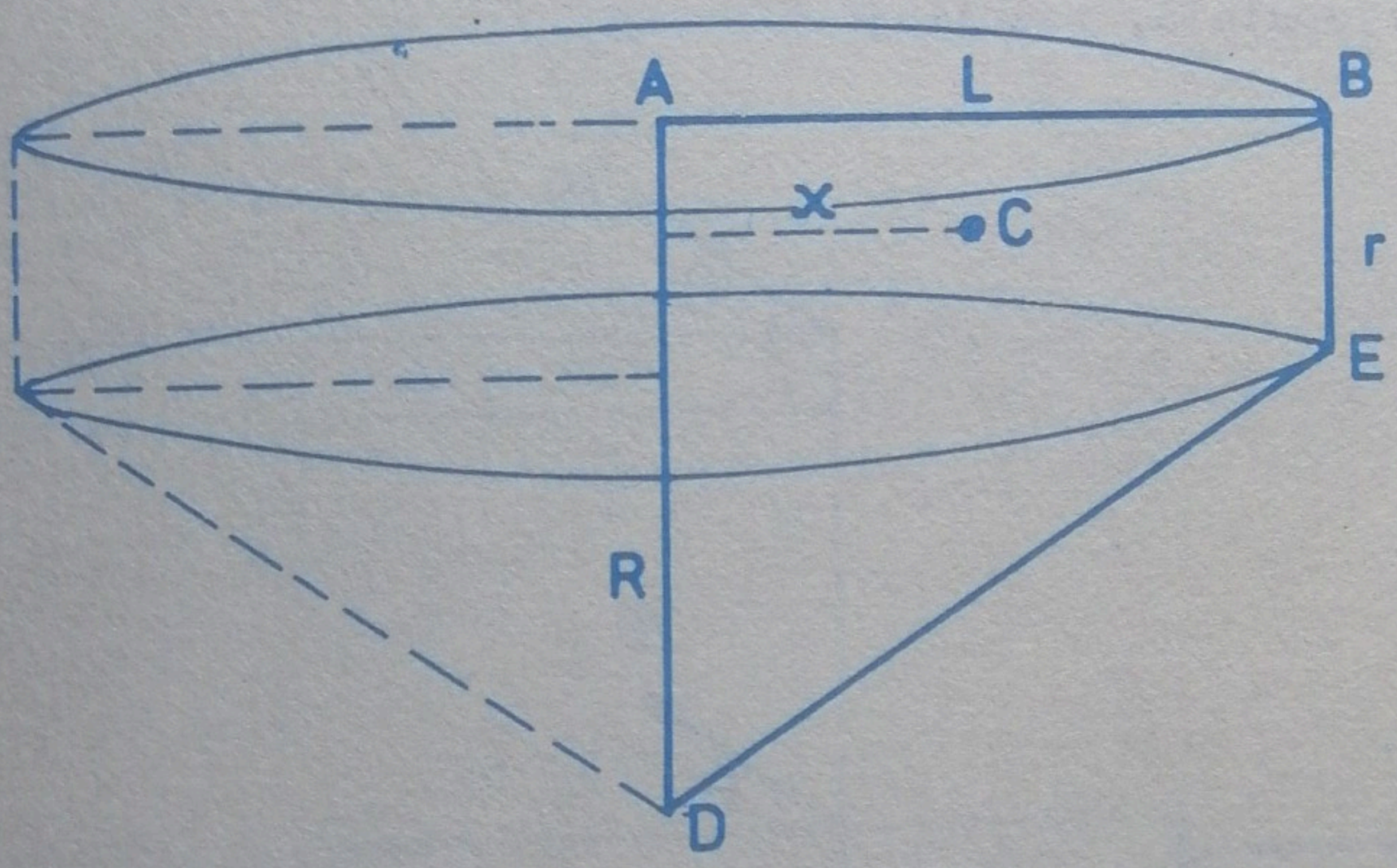


Figura I.74

$$\frac{\pi L^2(R - r)}{3} + \pi L^2 r = (R + r)\frac{L}{2} 2\pi x;$$

$$x = \frac{L}{3}\left(1 + \frac{r}{R + r}\right).$$

Se observă că x nu depinde de θ. Impunînd condiţia: x = L/3, rezultă r = o.

Concluzie: echilibrul plăcii este posibil numai dacă forma sa este un triunghi dreptunghic ABD.

C-da 69 coala 10

Problema 47

O broască cu masa m stă pe capătul unei scînduri cu lungimea L, masa M, care pluteşte pe o apă liniştită. Se cer:

1) viteza cu care trebuie să sară broasca pe o direcţie care face unghiul θ cu orizontala, pentru a ajunge pe capătul celălalt al scîndurii;

2) înălţimea maximă atinsă de broască. Se vor neglija frecările dintre scîndură şi apă, precum şi mişcarea scîndurii în plan vertical. Se dau: m = 27o g; L = 1 m; M = 3 kg; g=1o m/s^2.

Concursul de fizică, Etapa finală, 1969)

Rezolvare

Din desenul prezentat în figura I.75 şi din legea conservării impulsului scrisă pentru proiecţiile impulsurilor pe direcţie orizontală, rezultă:

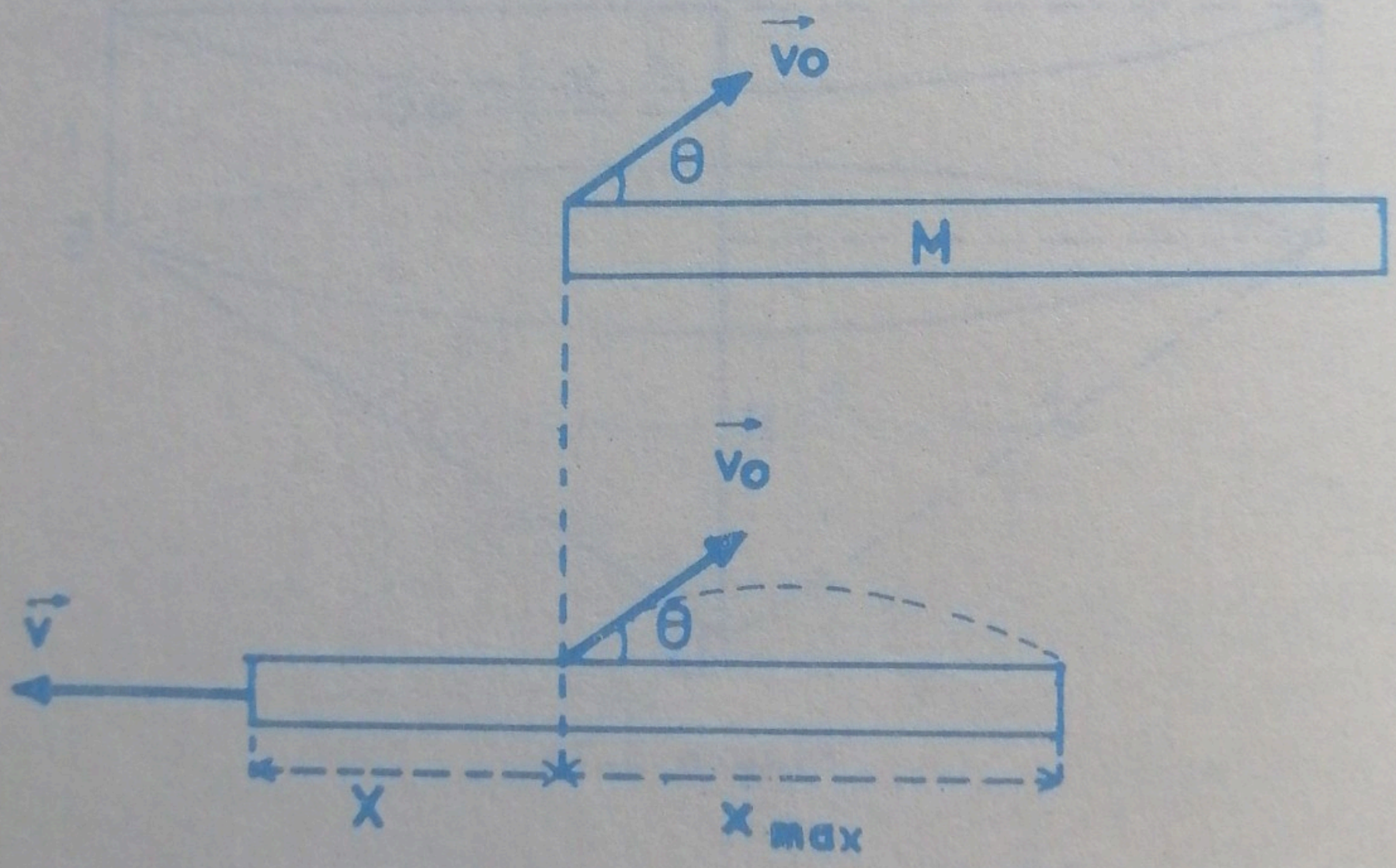


Figura I.75

$$X + x_{max} = L;$$

$$vt + \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g} = L;$$

$$t = t_u + t_c = 2t_u = \frac{2v_o \sin\theta}{g};$$

$$mv_o\cos\theta = Mv;$$

$$v = \frac{mv_o\cos\theta}{M};$$

$$\frac{mv_o\cos\theta}{M}\, 2\, \frac{v_o\sin\theta}{g} + \frac{v_o^2\sin 2\theta}{g} = L;$$

$$v_o = \sqrt{\frac{LgM}{(m + M)\sin 2\theta}} = 3{,}31 \text{ m/s}.$$

$$h_{max} = v_{oy}^2/2g = \frac{v_o^2\sin^2\theta}{2g};$$

$$h_{max} = \frac{LM}{4(m + M)}\, tg\theta.$$

Problema 48

Pe un cărucior cu masa m_1 se află un om cu masa m_2 şi n bile sferice identice, fiecare avînd masa m. Bilele se aruncă cu viteza $\vec{v}_o$ de pe cărucior, pe direcţie orizontală în acelaşi sens. Să se calculeze viteza pe care o va căpăta căruciorul dacă bilele se lansează:

1) toate deodată;

2) pe rînd.

Rezolvare

Deoarece enunţul problemei nu precizează faţă de cine este considerată viteza $\vec{v}_o$, vom avea în atenţie următoarele două situaţii:

A) viteza $\vec{v}_o$ considerată în raport cu căruciorul, după ce bila sau bilele au părăsit căr uciorul;

B) viteza $\vec{v}_o$ considerată în raport cu solul, după ce bila sau bilele au părăsit căruciorul.

A)

1) Legea conservării impulsului trebuie scrisă faţă de sol, deci viteza căruciorului şi viteza bilelor, după lansarea acestora trebuie calculate în raport cu solul.

In desenul din figura I.76, $\vec{v}$ este viteza căruciorului în raport cu solul după aruncarea simultană a tuturor bilelor, iar $\vec{v}_o$ este viteza bilelor în raport cu căruciorul, după ce bilele au părăsit căruciorul.

Rezultă:

$$\vec{v}_o = \vec{V} - \vec{v};$$

$\vec{V}$ = viteza bilelor față de sol, după ce au părăsit căruciorul;

$$v_o = \sqrt{v^2 + V^2 - 2vV\cos 180^o} = v + V;$$

$$V = v_o - v.$$

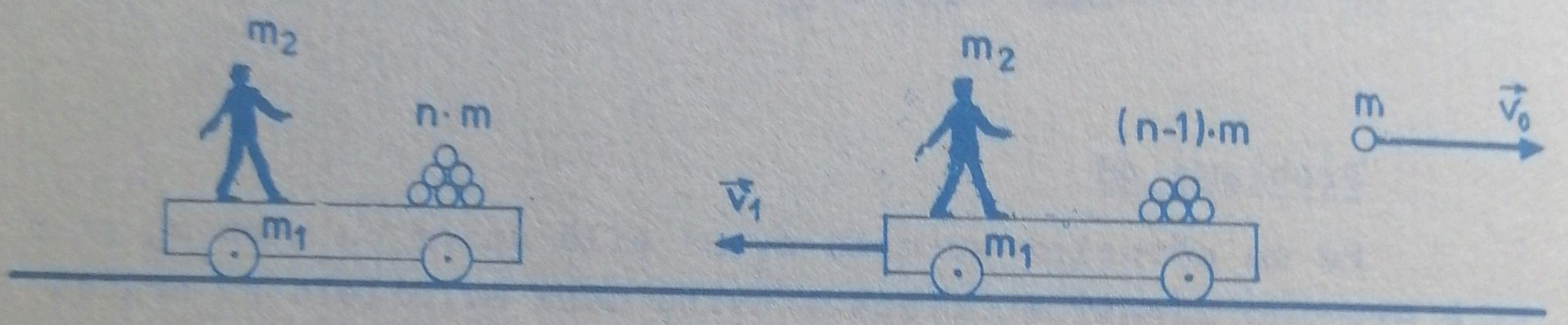


Figura I.76

Inainte de aruncarea bilelor sistemul este în repaus față de sol, deci impulsul său față de sol este:

$$\vec{p}_i = o.$$

După lansarea bilelor impulsul sistemului este:

$$\vec{p}_f = (m_1 + m_2)\vec{v} + nm\vec{V}.$$

Din legea conservării impulsului, rezultă:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f;$$

$$o = (m_1 + m_2)\vec{v} + nm\vec{V};$$

$$(m_1 + m_2)v = nmV;$$

$$(m_1 + m_2) = nm(v_o - v);$$

$$v = \frac{nmv_o}{m_1 + m_2 + nm}.$$

2) Aruncarea primei bile

In desenul din figura I.77, $\vec{v}_1$ este viteza căruciorului față de sol după aruncarea primei bile, iar $\vec{v}_o$ este viteza primei bile aruncate, considerată în raport cu căruciorul după lansare.

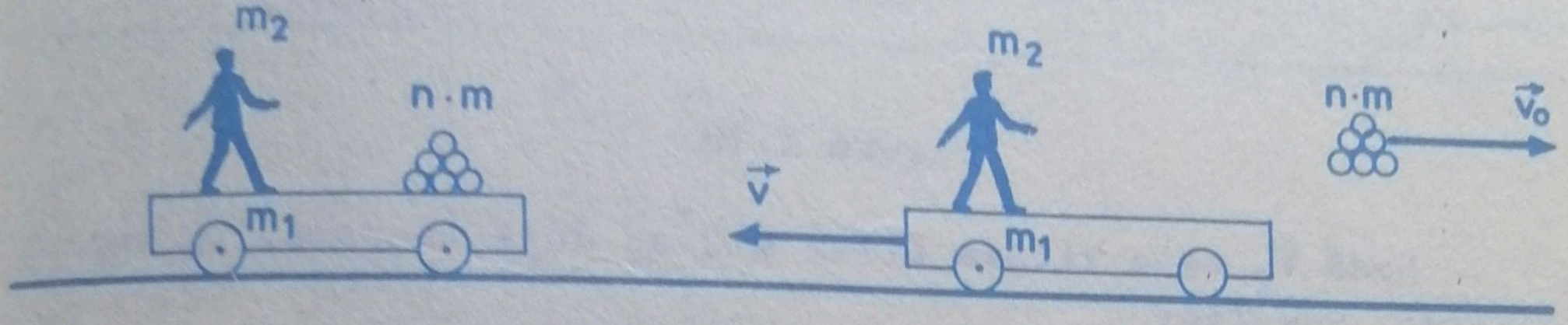


Figura I.77

Dacă V_1 este viteza primei bile, după aruncare, în raport cu solul, rezultă:

$$\vec{v}_o = \vec{V}_1 - \vec{v}_1;$$

$$v_o = V_1 + v_1;$$

$$V_1 = v_o - v_1.$$

Din legea conservării impulsului rezultă:

$$o = \{m_1 + m_2 + (n - 1)m\}\vec{v}_1 + m\vec{V}_1;$$

$$\{m_1 + m_2 + (n - 1)m\}v_1 = mV_1;$$

$$\{m_1 + m_2 + (n - 1)m\}v_1 = m(v_o - v_1);$$

$$v_1 = \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + nm}.$$

Aruncarea bilei a 2-a

In desenul din figura I.78, $\vec{v}_1$ este viteza căruciorului față de sol înainte de lansarea bilei a 2-a; $\vec{v}_2$ este viteza căruciorului față de sol după lansarea bilei a 2-a, iar $\vec{v}_{2;1}$ este viteza bilei a 2-a, după lansare, în raport cu căruciorul.

$$\vec{v}_{2;1} = \vec{v}_o.$$

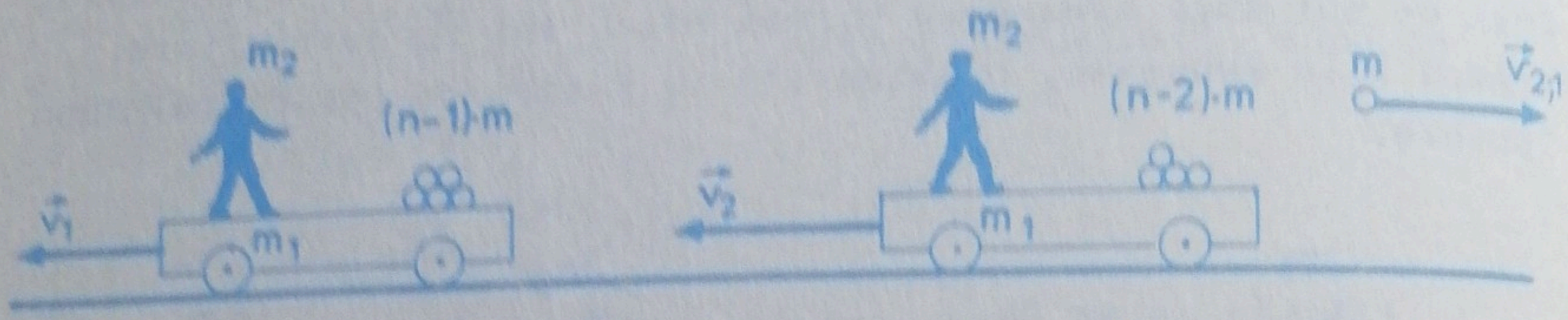


Figura I.78

Dacă $\vec{V}_2$ este viteza bilei a 2-a, după lansare, în raport cu solul, rezultă:

$$\vec{v}_o = \vec{V}_2 - \vec{v}_2;$$

$$v_o = V_2 + v_2;$$

$$V_2 = v_o - v_2.$$

Din legea conservării impulsului, rezultă:

$$\{m_1 + m_2 + (n-1)m\}\vec{v}_1 =$$

$$= \{m_1 + m_2 + (n-2)m\}\vec{v}_2 + m\vec{V}_2;$$

$$\{m_1 + m_2 + (n-1)m\}v_1 =$$

$$= \{m_1 + m_2 + (n-2)m\} - mV_2;$$

$$\{m_1 + m_2 + (n-1)m\}v_1 =$$

$$= \{m_1 + m_2 + (n-2)m\}v_2 - mv_o + mv_2;$$

$$v_2 = v_1 + \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + (n-1)m};$$

$$v_2 = \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + nm} + \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + (n-1)m}.$$

Aruncarea bilei a 3-a

$\vec{v}_3$ = viteza căruciorului faţă de sol după lansarea bilei a 3-a;

$\vec{V}_3$ = viteza bilei a 3-a, după lansare, în raport cu solul;

$\vec{v}_o$ = viteza bilei a 3-a în raport cu căruciorul după lansare;

$$\vec{v}_o = \vec{V}_3 - \vec{v}_3;$$

$$v_o = V_3 + v_3;$$

$$V_3 = v_o - v_3;$$

$$\{m_1 + m_2 + (n - 2)m\}\vec{v}_2 =$$

$$= \{m_1 + m_2 + (n - 3)m\}\vec{v}_3 + m\vec{V}_3;$$

$$\{m_1 + m_2 + (n - 2)m\}v_2 =$$

$$= \{m_1 + m_2 + (n - 3)m\}v_3 - mV_3;$$

$$\{m_1 + m_2 + (n - 2)m\}v_2 =$$

$$= \{m_1 + m_2 + (n - 3)m\} - mv_o + mv_3;$$

$$v_3 = v_2 + \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + (n - 2)m};$$

$$v_3 = \frac{mv_o}{m_1+m_2+nm} + \frac{mv_o}{m_1+m_2+(n-1)m} + \frac{mv_o}{m_1+m_2+(n-2)m};$$

După lansarea penultimei bile, viteza căruciorului în raport cu solul este:

$$v_{n-1} = v_{n-2} + \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + \{n - (n-2)\}m};$$

$$v_{n-1} = v_{n-2} + \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + 2m}.$$

După aruncarea ultimei bile, viteza căruciorului în raport cu solul ewte:

$$v_n = v_{n-1} + \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + \{n - (n-1)\}m};$$

$$v_n = v_{n-1} + \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + m};$$

$$v_n = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + (n-k)m}$$

B)

1) Notaţii:

$\vec{v}$ = viteza căruciorului faţă de sol, după aruncarea bilelor;

$\vec{v}_o$ = viteza bilelor faţă de sol după lansare.

Din legea conservării impulsului rezultă:

$$o = (m_1 + m_2)\vec{v} + nm\vec{v}_o;$$

$$(m_1 + m_2)v = nmv_o;$$

$$v = \frac{nmv_o}{m_1 + m_2}.$$

2)

Aruncarea primei bile

$\vec{v}_1$ = viteza căruciorului faţă de sol după aruncarea primei bile.

$$o = \{m_1 + m_2 + (n-1)m\}\vec{v}_1 + m\vec{v}_o;$$

$$v_1 = \frac{mv_o}{m_1 + m_2 + (n-1)m}.$$

Aruncarea bilei a 2-a

$\vec{v}_2$ = viteza căruciorului faţă de sol după lansarea bilei a 2-a;

$$\{m_1 + m_2 + (n-1)m\}\vec{v}_1 =$$

$$= \{m_1 + m_2 + (n-2)m\}\vec{v}_2 + m\vec{v}_o;$$

$$v_2 = \frac{2mv_o}{m_1 + m_2 + (n-2)m}.$$

Aruncarea bilei a 3-a

$$v_3 = \frac{3mv_o}{m_1 + m_2 + (n-3)m}.$$

După aruncarea ultimei bile, viteza căruciorului va fi:

$$v_n = \frac{nmv_o}{m_1 + m_2}.$$

Problema 49

Două puncte materiale A şi B avînd masele m_1 şi m_2 se deplasează uniform cu vitezele v_1 şi v_2 pe două direcţii care fac între ele unghiul Θ. In momentul iniţial punctele se află la distanţele d_1 şi d_2 faţă de intersecţia O a celor două direcţii.

1) Să se stabilească condiţia de întîlnire a celor două mobile.

2) Să se stabilească ecuaţia centrului de masă al sistemului format de aceste puncte materiale, pînă la ciocnirea lor.

3) Să se calculeze viteza centrului de masă pînă la ciocnire.

4) Care este traiectoria şi ce valoare are viteza sistemului după ciocnirea plastică a punctelor materiale.

5) Să se calculeze variaţia energiei sistemului produsă în timpul ciocnirii.

6) Intre ce limite este cuprinsă variaţia energiei în funcţie de unghiul θ?

(Concursul de fizică, Etapa finală, 197o)

Rezolvare

1) Să presupunem că mişcările celor două mobile se desfăşoară în planul xOy, aşa cum indică desenul din figura I.79.

$$d_1 = v_1 t;$$

$$d_2 = v_2 t; \quad d_1/d_2 = v_1/v_2.$$

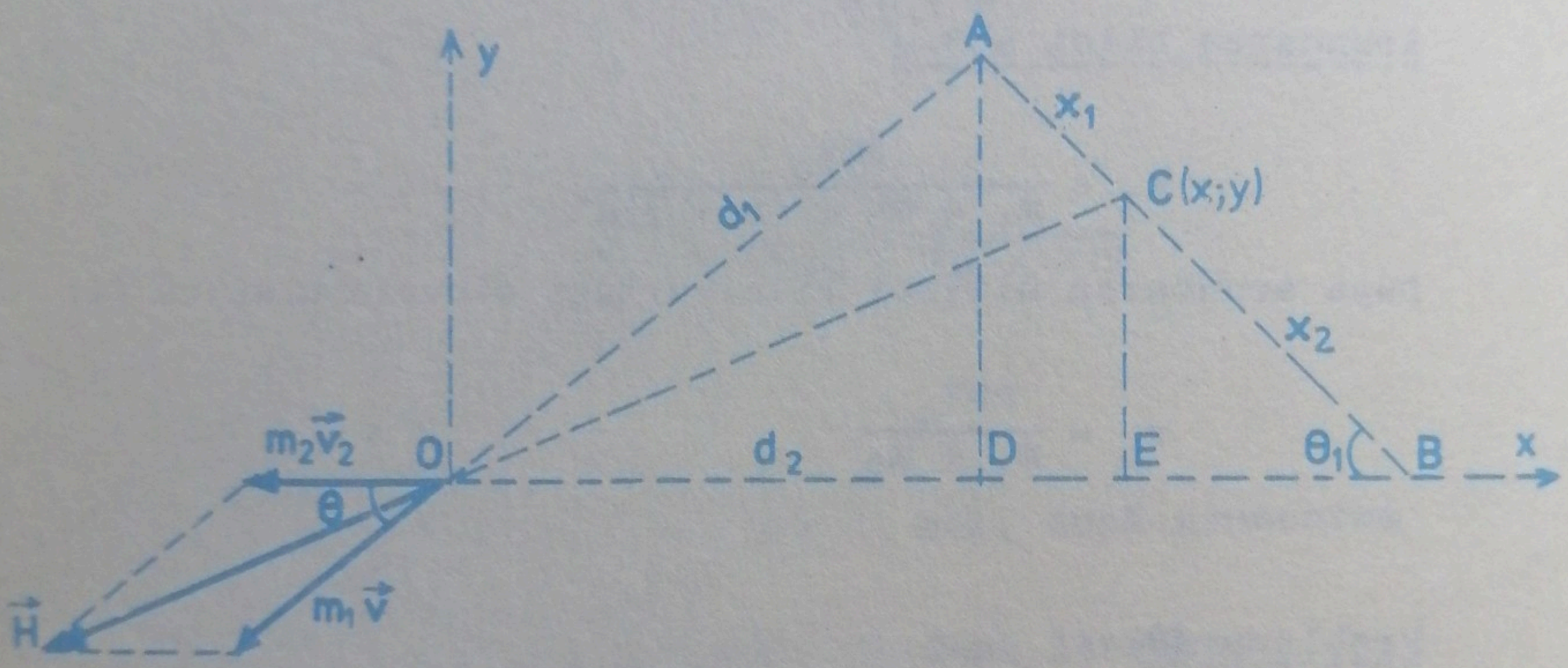


Figura I.79

2)

$$x = OE = d_2 - EB = d_2 - x_2 \cos\theta_1;$$

$$y = x_2 \sin\theta_1;$$

$$x_1 = \frac{dm_2}{m_1 + m_2};$$

$$x_2 = \frac{dm_1}{m_1 + m_2};$$

$$\sin\theta_1 = \frac{AD}{AB} = \frac{d_1 \sin\theta}{d};$$

$$\cos\theta_1 = \frac{d_2 - d_1\cos\theta}{d};$$

$$x = d_2 - (d_2 - d_1\cos\theta)\frac{m_1}{m_1 + m_2};$$

$$y = d_1\sin\theta\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$x = \left\{v_2 - (v_2 - v_1\cos\theta)\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right\}t;$$

$$y = v_1\sin\theta\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}\,t.$$

Eliminînd parametrul t din ultimele două ecuaţii se obţine , pentru traiectoria centrului de masă al sistemului, o ecuaţie de forma:

$$ax + by = o,$$

care reprezintă ecuaţia unei drepte care trece prin origine.

3) $$v_{CM} = v_C = OC/t;$$

$$OC^2 = OE^2 + EC^2 = x^2 + y^2;$$

$$x^2 = \frac{d_1^2}{v_1^2}\left\{v_2 - (v_2 - v_1\cos\theta)\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right\}^2;$$

$$y^2 = \frac{d_1^2}{v_1^2}\left\{v_1\sin\theta\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right\}^2;$$

$$v_C = \sqrt{\left\{v_2-(v_2-v_1\cos\theta)\frac{m_1}{m_1+m_2}\right\}^2 + \left\{v_1\sin\theta\,\frac{m_1}{m_1+m_2}\right\}^2};$$

$$v_C^2 = v_2^2 - 2v_2(v_2 - v_1\cos\theta)\frac{m_1}{m_1 + m_2} +$$

$$+ (v_2 - v_1\cos\theta)^2\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} +$$

$$+ v_1^2\sin^2\theta\,\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2};$$

$$v_C^2 = v_2^2 - \frac{2v_2^2 m_1}{m_1 + m_2} + \frac{2v_1 v_2 m_1 \cos\theta}{m_1 + m_2} + \frac{v_2^2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} -$$

$$- \frac{2v_1 v_2 m_1^2 \cos\theta}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{v_1^2 m_1^2 \cos\theta\cos\theta}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{v_1^2 m_1^2 \sin^2\theta}{(m_1 + m_2)^2} =$$

$$= v_2^2 + \frac{v_1^2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{v_2^2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} +$$

$$+ \frac{2v_1 v_2 m_1 \cos\theta}{m_1 + m_2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) - \frac{2m_1 v_2^2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{v_1^2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{2v_1 v_2 m_1 (m_1 + m_2 - m_1)\cos\theta}{(m_1 + m_2)^2} +$$

$$+ v_2^2\left\{1 + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right\};$$

$$v_C^2 = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 v_1 m_2 v_2 \cos\theta}{(m_1 + m_2)^2};$$

$$v_C = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 v_1 m_2 v_2 \cos\theta}}{m_1 + m_2}.$$

4) Viteza ansamblului obţinut prin ciocnirea plastică a corpurilor se obţine folosind legea conservării impulsului.

Rezultă:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v};$$

$$v = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 v_1 m_2 v_2 \cos\theta}}{m_1 + m_2}.$$

Viteza ansamblului obţinut prin ciocnirea plastică a punctelor materiale a rezultat egală cu viteza centrului de masă al punctelor materiale înaintea ciocnirii acestora.

Cele două puncte materiale formează un sistem mecanic izolat de exterior. De aceea, impulsul sistemului trebuie să-şi conserve atît valoarea cît şi orientarea. Orientarea vectorului impuls total al sistemului înainte de ciocnire era aceeaşi cu orientarea vectorului viteză al centrului de masă. Deci după ciocnire vectorul viteză al ansamblului va avea aceeaşi orientare ca şi viteza centrului de masă înainte de ciocnire.

5) Ciocnirea fiind plastică energia cinetică a ansamblului este mai mică decît suma energiilor cinetice ale punctelor materiale înainte de ciocnire.

Rezultă:

$$\Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)^2}{2};$$

$$\Delta E = \frac{m_1\ m_2}{m_1 + m_2}\ \frac{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\theta}{2}$$

6)

Dacă $\theta = o$; $\cos\theta = 1$;

$$\Delta E_1 = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Dacă $\theta = 180^o$; $\cos\theta = -1$;

$$\Delta e_2 = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2};$$

$$\Delta E_1 \leq \Delta E \leq \Delta E_2.$$

Problema 5o

Un corp cu masa m, aşezat pe un plan orizontal, este legat de capătul unui fir inextensibil orizontal trecut peste un scripete fix, mic şi uşor. La celălalt capăt al firului este suspendat un corp cu masa m_2, aflat la înălţimea h deasupra solului. In momentul eliberării sistemului se aruncă de la sol, pe verticala corpului de masă m_2, un corp cu masa m_1.

Știind că ansamblul (m_1; m_2) obținut prin ciocnirea plastică a celor două corpuri atinge înălțimea maximă în momentul opririi corpului de pe suportul orizontal, să se calculeze cu ce viteză și după cît timp ansamblul lovește solul, considerînd că firul s-a rupt în momentul ciocnirii.

Aplicație numerică: $m = m_1 = m_2 = 1$ kg; $h = 4$ m; $\mu = 0{,}2$; $g = 10$ m/s^2.

Rezolvare

Starea inițială a elementelor sistemului este prezentată în desenul din figura I.8o.

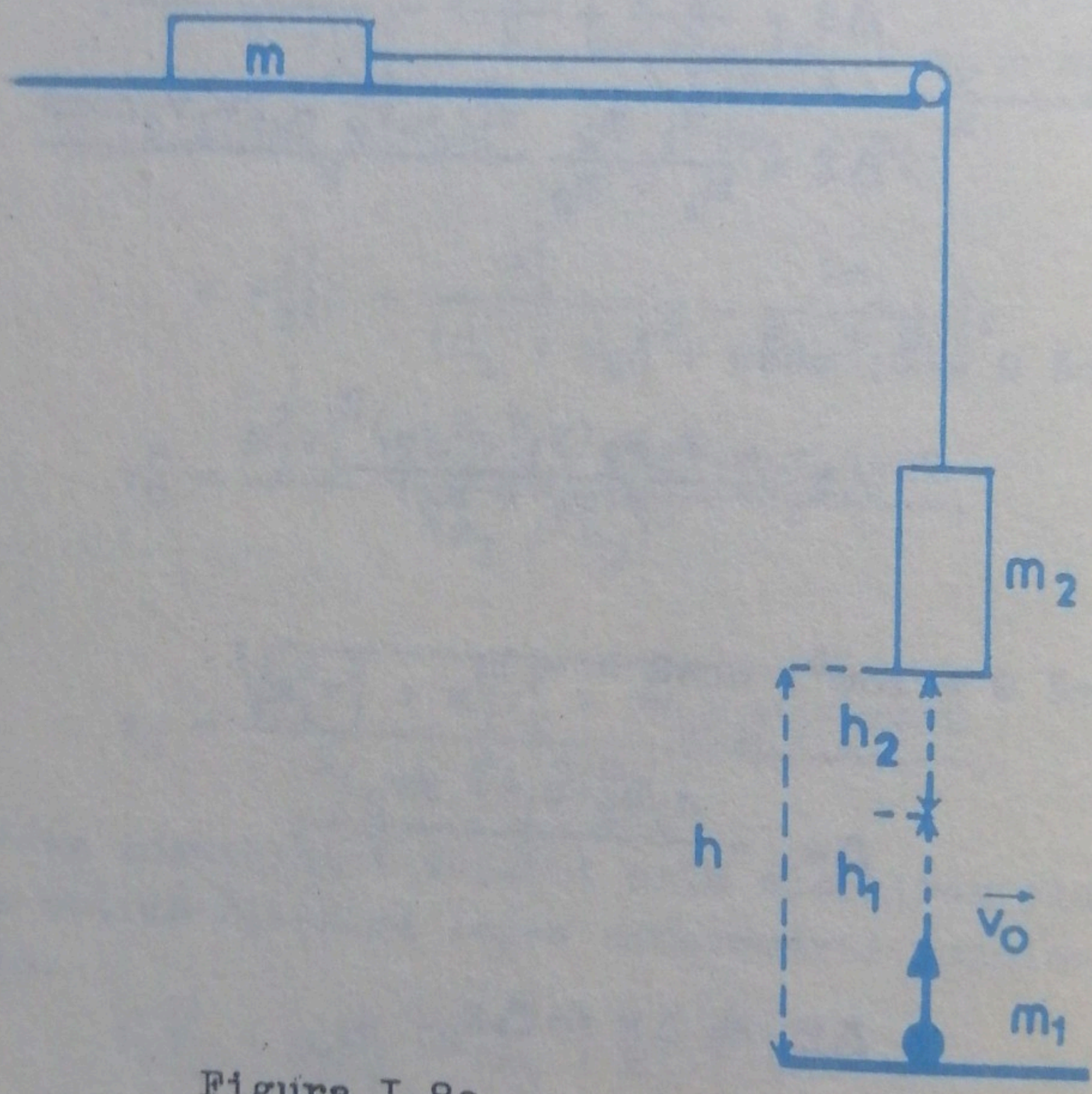


Figura I.8o

$$a = \frac{(m_2 g - \mu m g)}{m + m_2} = \frac{(m_2 - \mu m)g}{m + m_2} = 4 \text{ m/s}^2;$$

$$v_o t - g t^2/2;$$

$$h_2 \quad a t^2/2;$$

$$h = h_1 + h_2;$$

$$h = v_o t - \frac{gt^2}{2} + \frac{at^2}{2};$$

$$v_o = \frac{2h + (g - a)t^2}{2t}. \qquad (1)$$

Vitezele corpurilor m_1 şi m_2 în momentul ciocnirii sînt:

$$v_1 = v_o - gt;$$

$$v_2 = at.$$

Din legea conservării impulsului rezultă:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v};$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v;$$

$$v = \frac{m_1 v_o - (m_1 g + m_2 a)t}{m_1 + m_2};$$

$$h_{max} = v^2/2g;$$

$$t_u = v/g;$$

$$o = v_2 + a_f t_f;\ a_f = -\mu g;$$

$$at = \mu g t_f;$$

$$t_f = at/\mu g;$$

$$t_f = t_u;$$

$$at/\mu g = v/g;$$

$$\frac{at}{\mu} = \frac{m_1 v_o - (m_1 g + m_2 a)t}{m_1 + m_2}. \qquad (2)$$

Ecuaţiile (1) şi (2) formează un sistem de două ecuaţii pentru necunoscutele: t şi v_o.

Rezultă:

$$t = \sqrt{\frac{2h/\mu m_1}{2a(m_1 + m_2) + 2/\mu(m_1 g + m_2 a) - /\mu m_1(g - a)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{4}{51}}\ s;\ v_o = \frac{108}{\sqrt{51}}\ m/s.$$

În momentul ruperii firului viteza corpului m este:

$$v_2 = at;$$

$$v_2 = \frac{8}{\sqrt{51}}\ m/s.$$

Acesta va parcurge pînă la oprire distanţa:

$$a_{max} = - v_2^2/2a_f;$$

$$a_f = - /\mu g = - 2\ m/s^2;\ s_{max} = 16/51\ m.$$

Timpul necesar parcurgerii acestei distanţe se calculează din condiţia de oprire a corpului:

$$v_2 + a_f t_f = o;$$

$$t_f = - v_2/a_f;\ a_f = - /\mu g;$$

$$t_f = \frac{4}{\sqrt{51}}\ s = t_u.$$

După ciocnirea plastică a corpurilor m_1 şi m_2, care se produce la înălţimea $h_1 = 196/51$ m deasupra solului, ansamblul se va mai ridica pînă la înălţimea:

$$h_{max} = v^2/2g;\ v = \frac{40}{\sqrt{51}}\ m/s;$$

$$h_{max} = \frac{80}{51}\ m.$$

Faţă de sol ansamblul ajunge la înălţimea=

$$H = h_1 + h_{max} = 276/51\ m.$$

Ansamblul va reveni la sol cu viteza v_s după timpul t_s:

$$v_s = \sqrt{2gH} = \sqrt{\frac{5520}{51}}\ m/s;$$

$$t_s = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{276}{255}}\ s.$$

Problema 51

Pe o suprafaţă orizontală este aşezat un cărucior cu masa m_1, avînd formă de pană cu secţiunea longitudinală un triunghi dreptunghic. De pe sol, de lîngă vîrful penei se aruncă o minge cu masa m_2, sub unghiul θ faţă de orizontală, pentru care $tg\theta = 2$.

1) Stiind că în momentul în care mingea a ajuns la înălţimea maximă întîlneşte căruciorul, să se determine viteza pe care o va căpăta căruciorul, dacă ciocnirea a fost perfect elastică.

2) Ce condiţie trebuie să îndeplinească θ pentru ca mingea să lovească suprafaţa căruciorului de cel puţin două ori?

Rezolvare

1) Pentru calculul unghiului θ_1 de la baza penei ne folosim de desenul prezentat în figura I.81.

$$tg\theta_1 = h_{max}/X;$$

$$h_{max} = \frac{v_o^2 \sin^2\theta}{2g};$$

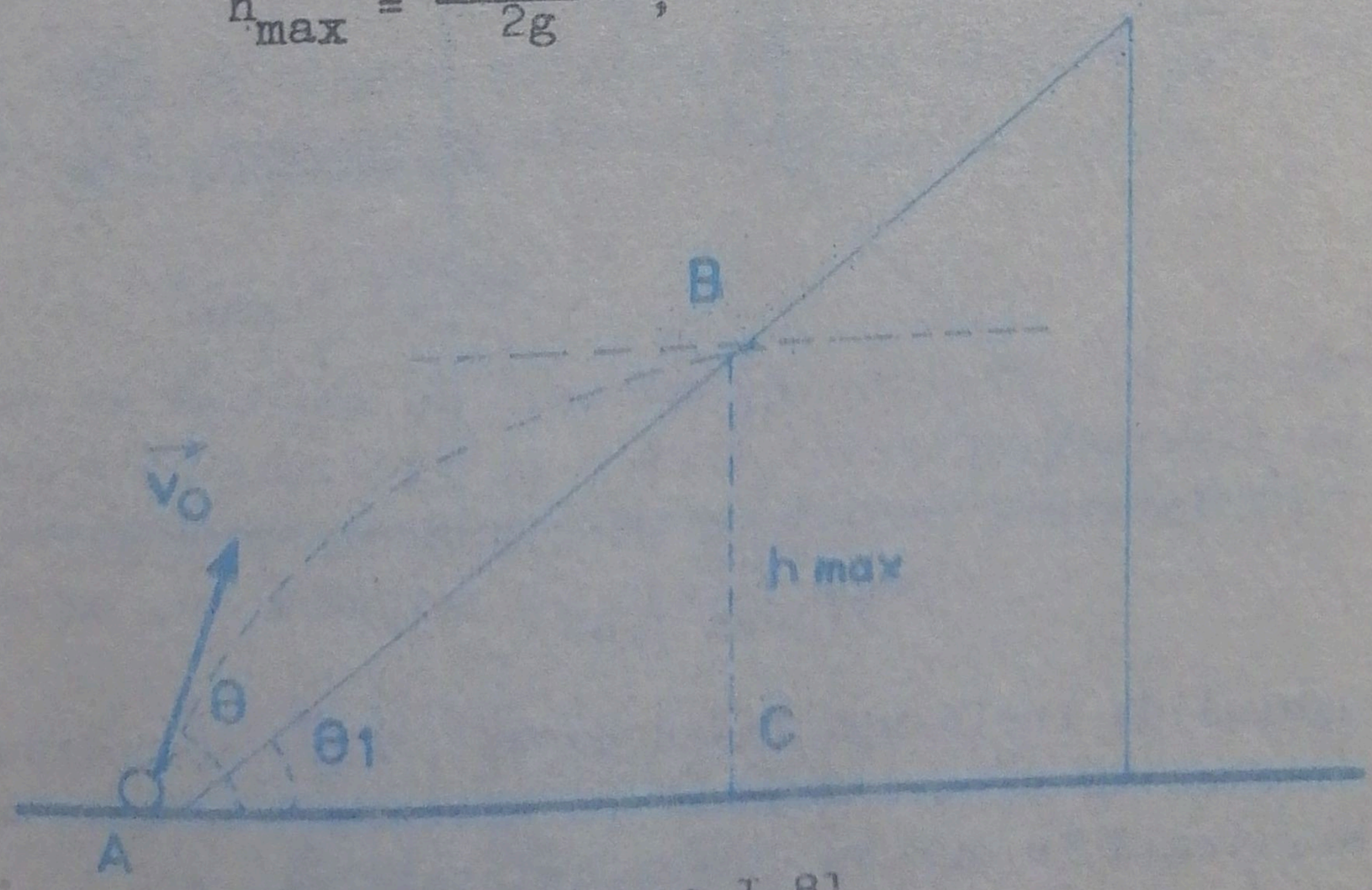


Figura I.81

$$X = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{2g};$$

$$tg\theta_1 = \frac{tg\theta}{2};$$

$$tg\theta = 2;\ tg\theta_1 = 1;\ \theta_1 = 45^\circ.$$

Ciocnirea mingii cu suprafaţa căruciorului fiind perfect elastică, se pot aplica atît legea conservării energiei mecanice, cît şi legea conservării impulsului, ţinînd seama că avem de a face cu un cărucior mobil.

In cazul în care căruciorul ar fi fost fix, viteza mingii şi-ar fi schimbat numai orientarea, nu şi modulul.

In cazul pe care-l studiem se vor modifica atît orientarea cît şi modulul vitezei mingii.

Orientarea vitezei mingii după ciocnire se determină cu ajutorul legii reflexiei, iar modulul vitezei după ciocnire se determină cu ajutorul legilor amintite.

Pentru aceasta avem la dispoziţie elementele prezentate în desenul din figura I.82.

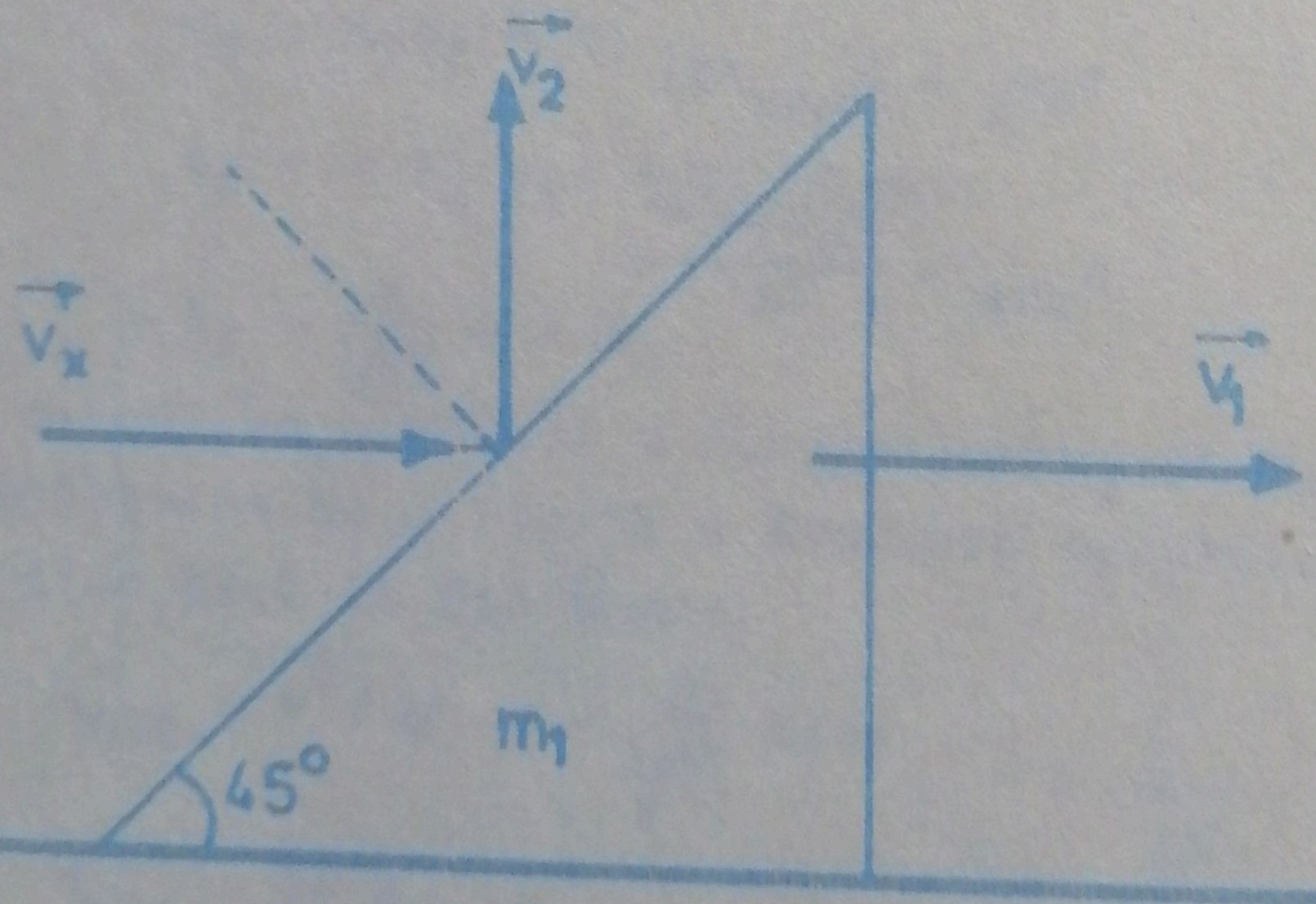


Figura I.82

Unghiul de incidenţă fiind de 45°, după ciocnirea căruciorului mingea va avea o mişcare pe verticală în sus, o aruncare pe verticală în sus cu viteza iniţială $\vec{v}_2$.

Legea conservării impulsului scrisă separat pentru cele două direcţii perpendiculare, conduce la relaţiile:

$$m_2 v_x = m_1 v_1;$$

$$m_2 v_2 = (m_1 + M)v.$$

Pe direcţie verticală sistemul minge - cărucior nu este izolat de exterior, el fiind în interacţiune cu Pămîntul, a cărui masă M este mult mai mare decît m_1 şi m_2. De aceea şi viteza pe care o va căpăta căruciorul şi Pămîntul pe direcţie verticală este:

$$v = \frac{m_2 v_2}{m_1 + M} = 0.$$

Deoarece $v_x = v_o \cos\theta$, rezultă:

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_o \cos\theta.$$

Din legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$\frac{m_2 v_x^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2};$$

$$v_2 = v_o \cos\theta \sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}}.$$

2) In timp ce mingea reflectată din punctul B se va ridica pe verticală parcurgînd distanţa:

$$H_{max} = v_2^2/2g,$$

căruciorul se va deplasa pe orizontală, uniform, cu viteza v_1.

Pentru a fi posibilă şi a doua ciocnire a mingii cu căruciorul este necesar ca mingea în cădere să sosească în punctul C de pe sol simultan cu vîrful penei.

$$h = h_{max} + H_{max};$$

$$h = \frac{v_o^2}{2g}(1 - \frac{m_2}{m_1} \cos^2\theta);$$

$$h = gt_c^2/2;$$

$$t_2 = t_u + t_c = \frac{v_2}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

$$t_2 = \frac{v_o \cos\theta}{g}\sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}} + \frac{v_o}{g}\sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}\cos^2\theta};$$

$$X = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{2g} = v_1 t_1;$$

$$t_1 = \frac{v_o m_1 \sin\theta}{m_2 g}.$$

Pentru a fi posibilă a.doua ciocnire, trebuie ca: $t_2 \quad t_1$.
Rezultă:

$$\cos\theta\sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}} + \sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}\cos^2\theta} \leqq \frac{m_1}{m_2}\sin\theta;$$

$$\cos\theta\sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}} \leqq \frac{m_1}{m_2}\sin\theta - \sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}\cos^2\theta}.$$

După ridicarea la pătrat şi reducerea termenilor asemenea, rezultă:

$$4\cos^2\theta\,\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) \leqq \sin^2\theta\left(\frac{m_1^2}{m_2^2} - 1\right)^2;$$

$$\operatorname{tg}\theta \geqq \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m_1}{m_1 - m_2}}.$$

Problema 52

Pe o suprafaţă orizontală a unei mese cu pernă de aer, un disc în mişcare cu viteza v ciocneşte perfect elastic, dar excentric, un alt disc identic cu primul, aflat în repaus. Considerînd razele discurilor foarte mici, să se demonstreze că traiectoriile discurilor după ciocnire sînt perpendiculare.

Rezolvare

In desenul din figura I.83 am notat cu $\vec{v}_1$ şi respectiv $\vec{v}_2$ vitezele discurilor după ciocnire.

Din legea conservării impulsului şi din legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2;$$

$$m^2v^2 = m^2v_1^2 + m^2v_2^2 + 2m^2v_1v_2\cos\theta;$$

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\theta;$$

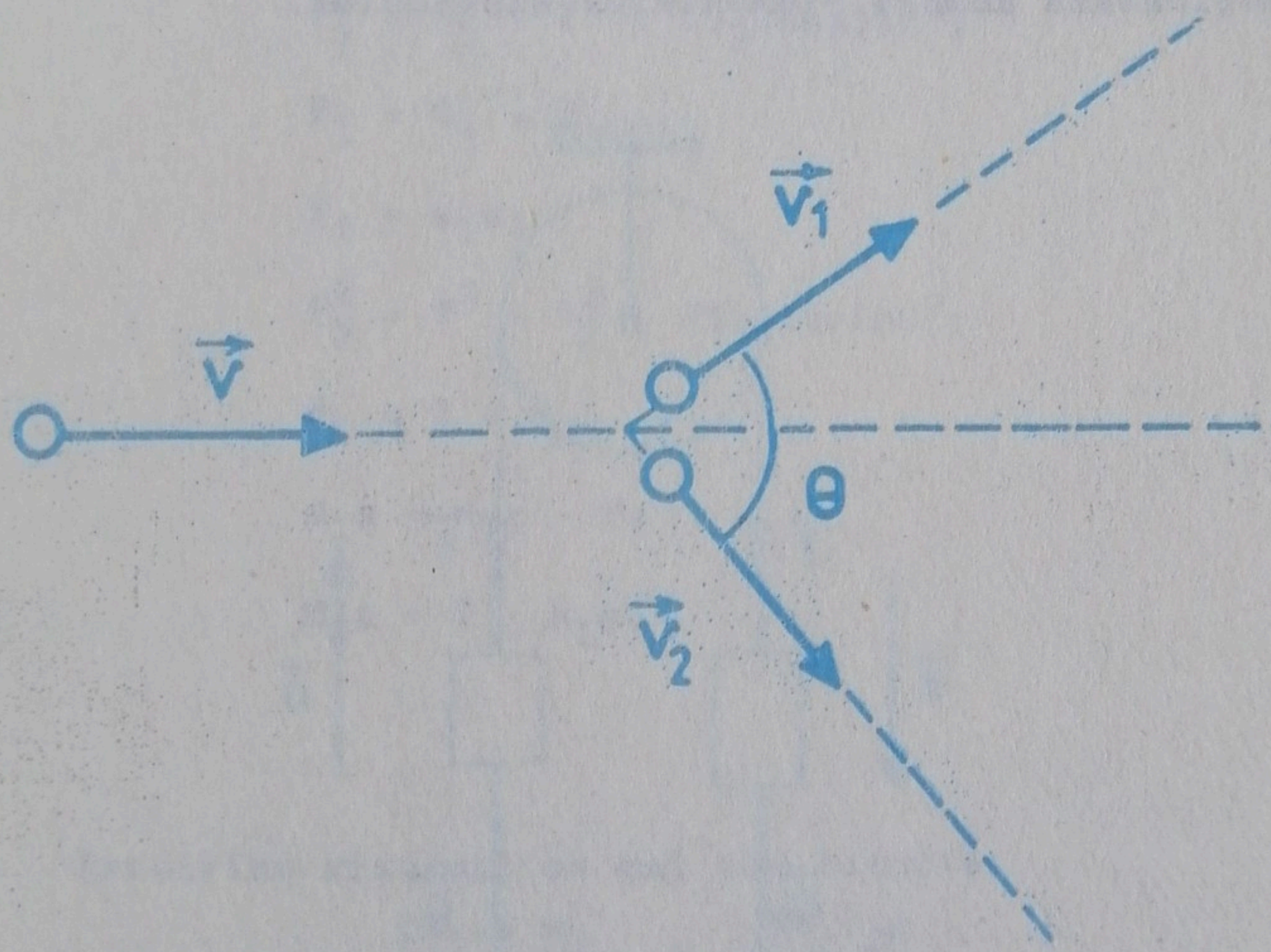


Figura I.83

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2};$$

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2;$$

$$\cos\theta = 0;$$

$$\theta = 90^o.$$

Problema 53

De capetele unui fir inextensibil şi imponderabil, trecut prin şanţul unui mic scripete fix, sînt suspendate două corpuri cu masele m_1 şi respectiv m_2. Neglijînd masa scripetelui, precum şi frecările de orice natură să se determine acceleraţia sistemului şi tensiunea din firul de legătură.

Rezolvare

Metoda observatorului inerţial

In desenul din figura I.84 sînt prezentate forţele reale care acţionează asupra elementelor sistemului.

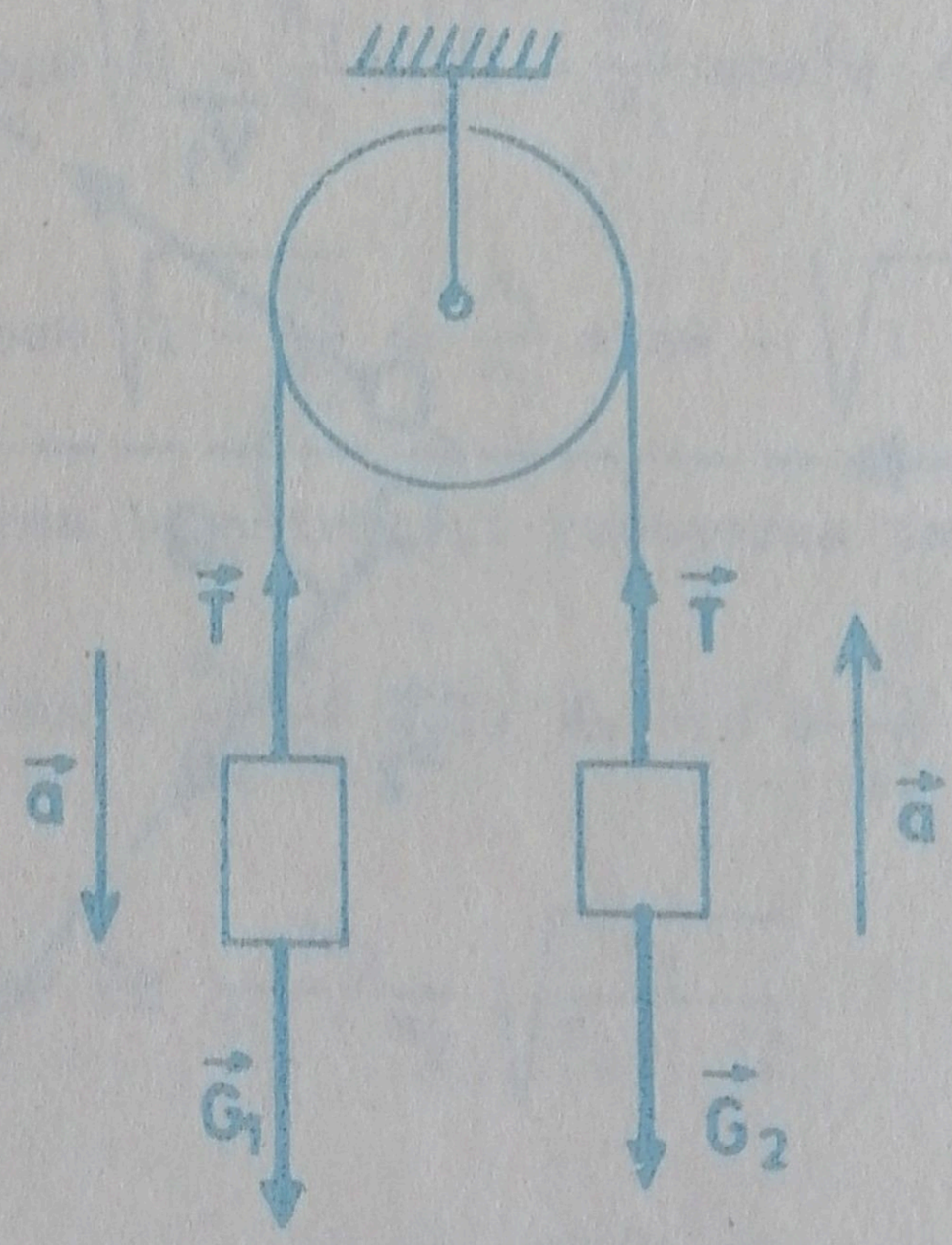


Figura I.84

Să presupunem că $m_1 > m_2$. Deoarece $G_1 > G_2$, corpul cu masa m_1 este cel care acţionează asupra corpului cu masa m_2 prin intermediul firului, cu o forţă notată cu $\vec{T}$, numită tensiune în fir. Ca urmare a principiului acţiunilor reciproce, corpul

cu masa m_2 va reacţiona asupra corpului cu masa m_1 cu o forţă egală în modul, dar de sens contrar.

Remarcînd faptul că acceleraţia celor două corpuri în raport cu solul are aceeaşi valoare, pentru fiecare corp se poate scrie un grup de două ecuaţii, în vederea calculării forţei care îi imprimă fiecărui corp acceleraţie.

$$\vec{F}_1 = m_1\vec{a};\ \vec{F}_1 = \vec{G}_1 + \vec{T};$$

$$\vec{F}_2 = m_2\vec{a};\ \vec{F}_2 = \vec{T} + \vec{G}_2;$$

$$F_1 = m_1 a;$$

$$F_1^2 = G_1^2 + T^2 + 2G_1 T\cos 180^\circ;$$

$$F_1 = G_1 - T;$$

$$F_2 = m_2 a;$$

$$F_2^2 = T^2 + G_2^2 + 2TG_2\cos 180^\circ;$$

$$F_2 = T - G_2;$$

$$m_1 a = m_1 g - T;$$

$$m_2 a = T - m_2 g.$$

Rezolvînd sistemul de mai sus rezultă:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g;\quad T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Metoda observatorului neinerţial

Avînd precizat sensul vectorului acceleraţie pentru fiecare corp, în desenul din figura I.85, în afara forţelor reale am reprezentat şi forţele de inerţie.

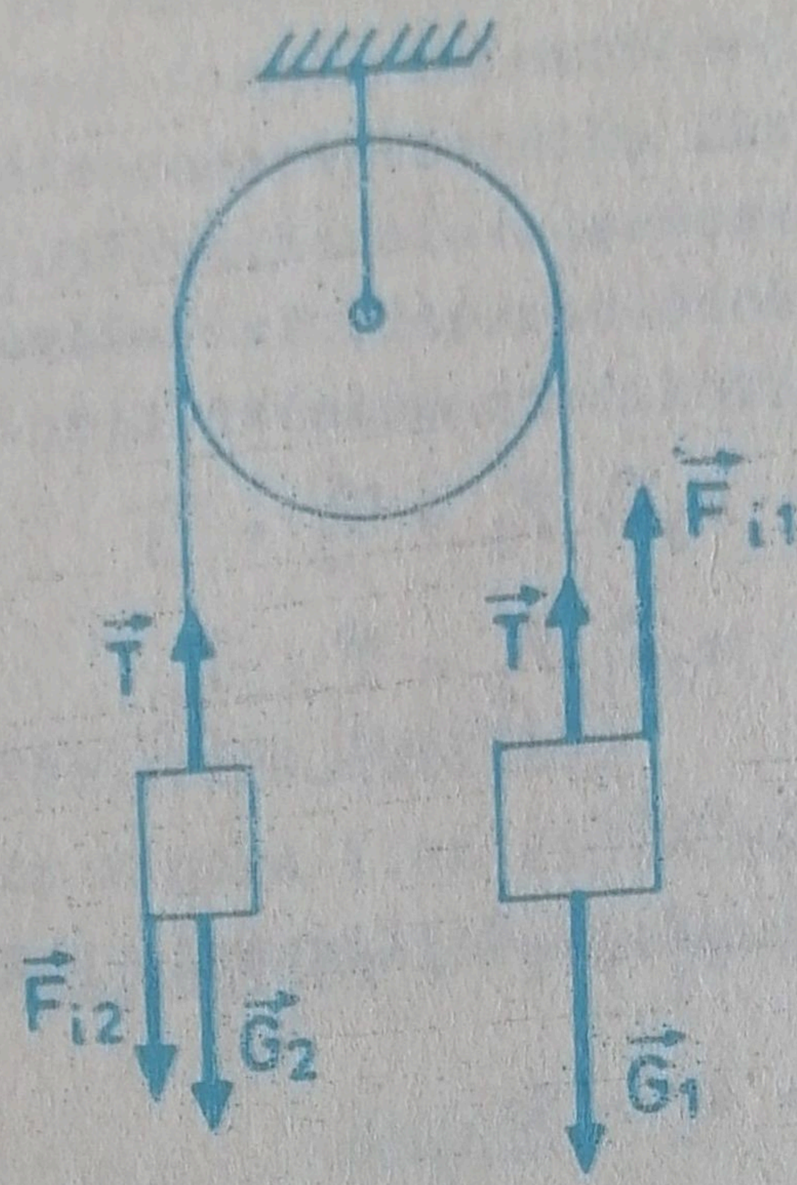


Figura I.85

Folosind principiul lui d'Alembert, rezultă:

$$\vec{F}_{i1} + \vec{G}_1 + \vec{T} = o;$$

$$\vec{G}_2 + \vec{F}_{i2} + \vec{T}' = o;$$

$$G_1 - F_{i1} - T = o;$$

$$- G_2 - F_{i2} + T = o;$$

$$m_1 g - m_1 a - T = 0;$$

$$- m_2 g - m_2 a + T = o;$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g; \quad T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Metoda teoremei variaţiei energiei totale

Desenul din figura I.86 prezintă elementele sistemului atît în starea iniţială (poziţiile A şi B), cît şi într-o stare oarecare (poziţiile A_1 şi B_1).

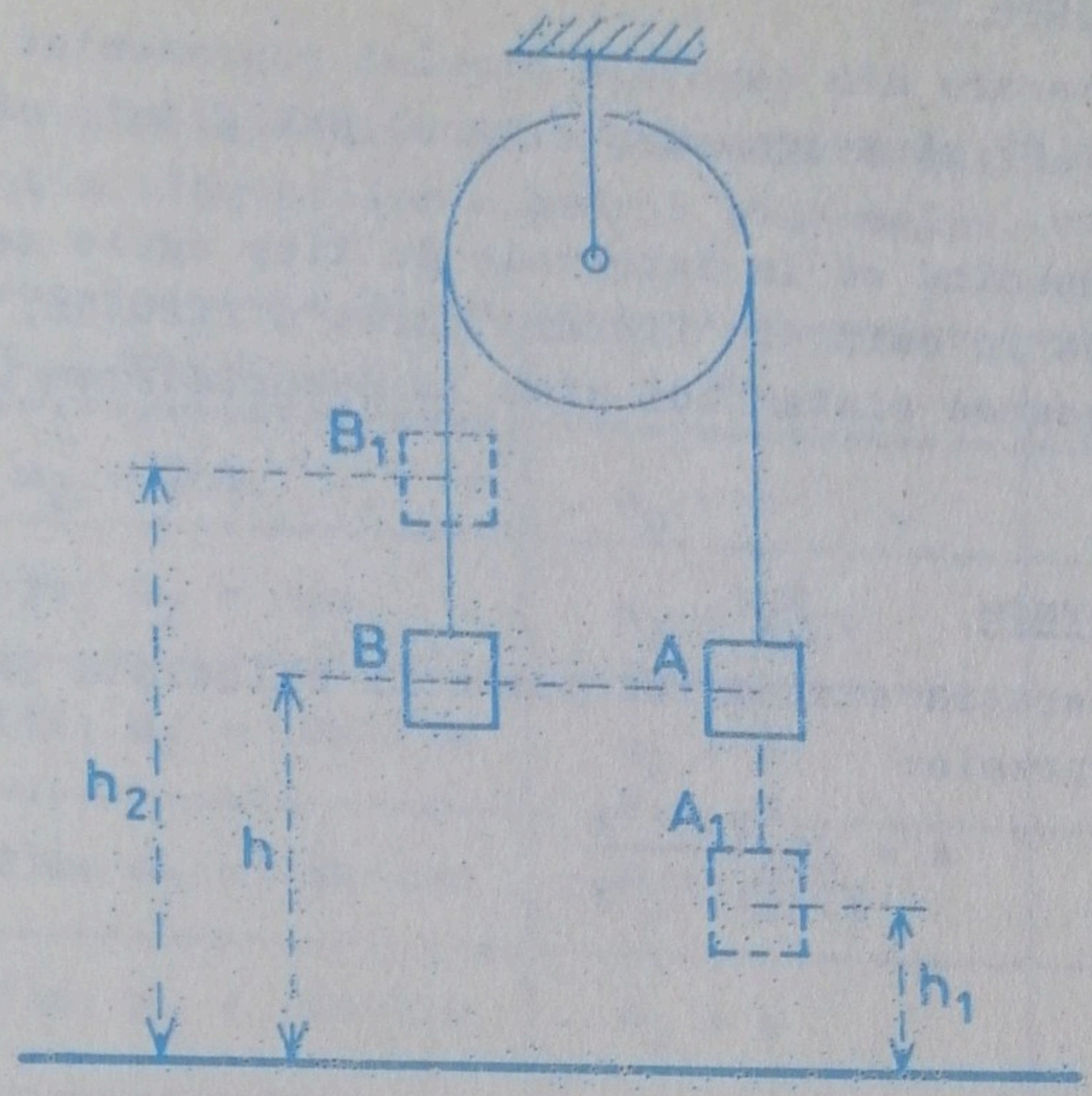


Figura I.86

$$E_{A_1B_1} - E_{AB} = L_f.$$

Deoarece se neglijează frecările, $L_f = o$ şi

$$E_{A_1B_1} = E_{AB};$$

$$m_1gh_1 + \frac{m_1v^2}{2} + m_2gh_2 + \frac{m_2v^2}{2} = m_1gh + m_2gh;$$

$$v^2(m_1 + m_2) = 2g(h - h_1)m_1 - 2g(h_2 - h)m_2;$$

$$h - h_1 = h_2 - h = s;$$

$$v^2(m_1 + m_2) = 2g(m_1 - m_2)s;$$

$$v^2 = 2\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}s; \quad v^2 = 2as;$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g.$$

Problema 54

La fiecare din capetele firului reprezentat în desenul din figura I.87 sînt suspendate, unul sub altul, cîte 2n corpuri identice.

Presupunînd că la intervale de timp egale se desprinde succesiv cîte un corp din fiecare parte a firului, să se studieze mişcarea sistemului pînă la desprinderea ultimului corp.

Rezolvare

Acceleraţia sistemului poate fi calculată în orice moment cu expresia:

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}.$$

In tabelul alăturat sînt prezentate datele care sintetizează evoluţia elementelor mişcării sistemului.

m_1 ; m_2	a	v
$m_1 = 2nm$; $m_2 = 2nm$	$a_o = o$	$v_o = o$
$m_1 = (2n-1)m$; $m_2 = 2nm$	$a_1 = \frac{g}{4n-1}$	$v_1 = a_1 t$
$m_1 = (2n-1)m$; $m_2 = (2n-1)m$	$a_2 = o$	$v_2 = v_1$
$m_1 = (2n-2)m$; $m_2 = (2n-1)m$	$a_3 = \frac{g}{4n-3}$	$v_3 = v_2 + a_3 t$
$m_1 = (2n-2)m$; $m_2 = (2n-2)m$	$a_4 = o$	$v_4 = v_3$
$m_1 = (2n-3)m$; $m_2 = (2n-2)m$	$a_5 = \frac{g}{4n-5}$	$v_5 = v_4 + a_5 t$
$m_1 = (2n-3)m$; $m_2 = (2n-3)m$	$a_6 = o$	$v_6 = v_5$
.....	.....	.....
$m_1 = \{2n-(2n-2)\}m = 2m$ $m_2 = \{2n-(2n-2)\}m = 2m$	$a_{4n-4} = o$	$v_{4n-4} = v_{4n-5}$
$m_1 = \{2n-(2n-1)\}m = m$ $m_2 = \{2n-(2n-2)\}m = 2m$	$a_{4n-3} = \frac{g}{4n-(4n-3)} = g/3$	$v_{4n-3} = v_{4n-4} + a_{4n-3} t$
$m_1 = \{2n-(2n-1)\}m = m$ $m_2 = \{2n-(2n-1)\}M = m$	$a_{4n-2} = o$	$v_{4n-2} = v_{4n-3}$
$m_1 = \{2n-(2n-o)\}m = o$ $m_2 = \{2n-(2n-1)\}m = m$	$a_{4n-1} = \frac{g}{4n-(4n-1)} = g$	$v_{4n-1} = v_{4n-2} + a_{4n-1} t$

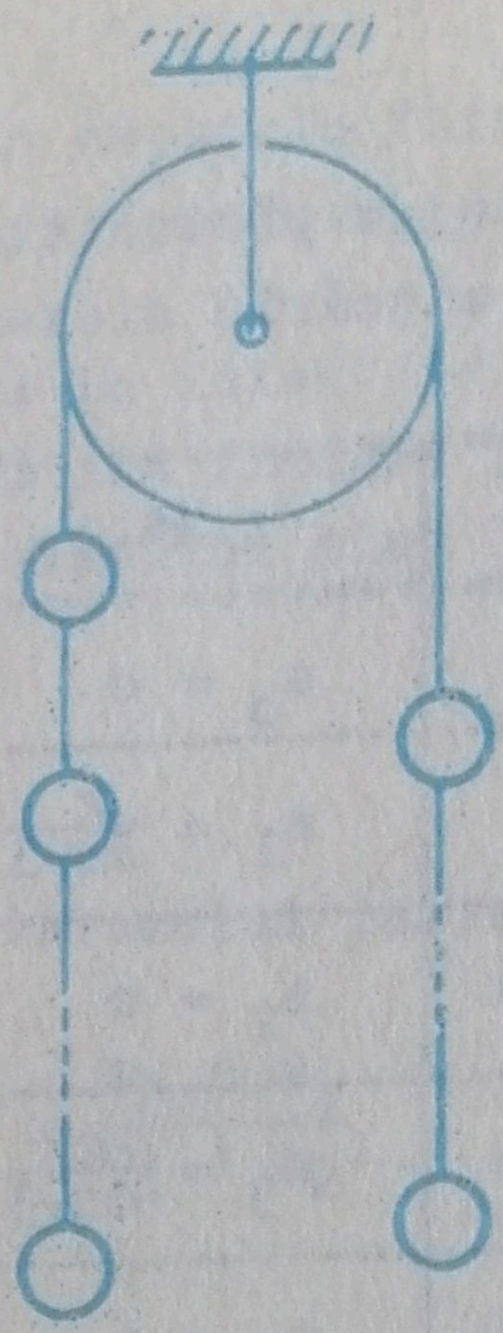


Figura I.87

Concluzii

1) In intervalele de timp în care $m_1 = m_2$, mişcarea sistemului este uniformă.

2) In intervalele de timp în care $m_2 = m_1 + m$, mişcarea sistemului este uniform accelerată, dar acceleraţia nu este aceeaşi de la un interval la altul, observînd o creştere a acesteia, astfel că de la valoarea zero ajunge la valoarea g.

3) Sensul de mişcare nu se modifică.

4) Viteza sistemului este din ce în ce mai mare. Aceasta rezultă din aceea că forţa care imprimă acceleraţie sistemului pe fiecare interval de timp, deşi rămîne constantă, ea acţionează de fiecare dată asupra unui sistem cu masa din ce în ce mai mică.

Graficul vuncţiei $v = f(t)$ este reprezentat în desenul din figura I.88.

Deoarece: $a_1 < a_3 < a_5 < \ldots\ldots\ldots$,

rezultă: $\theta_1 < \theta_3 < \theta_5 < \ldots\ldots\ldots$

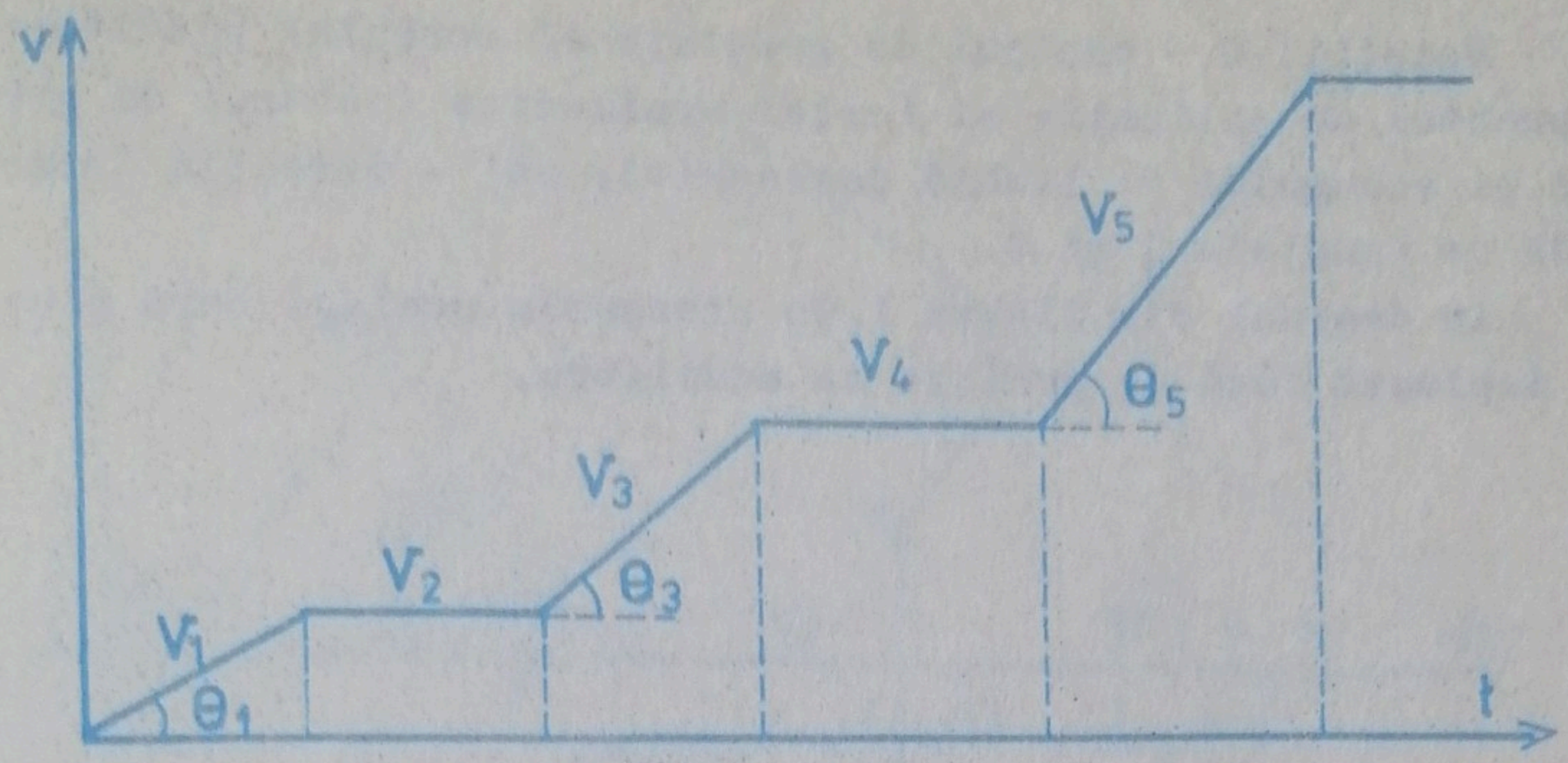


Figura I.88

Problema 55

O prismă cu secţiunea un pătrat şi un cilindru plutesc pe suprafaţa apei dintr-un vas. Să se studieze stabilitatea echilibrului acestor corpuri plutitoare.

Rezolvare

Un corp solid care pluteşte pe suprafaţa unui corp lichid este în echilibru stabil dacă, deplasîndu-l într-o poziţie apropiată de poziţia iniţială şi apoi îl lăsăm liber, el revine în poziţia de la început.

Stabilirea unei condiţii matematice prin care să se traducă stabilitatea echilibrului unui corp solid plutitor este posibilă după definirea noţiunii de metacentru.

In desenul din figura I.89 prezentăm în secţiune un corp solid plutitor.

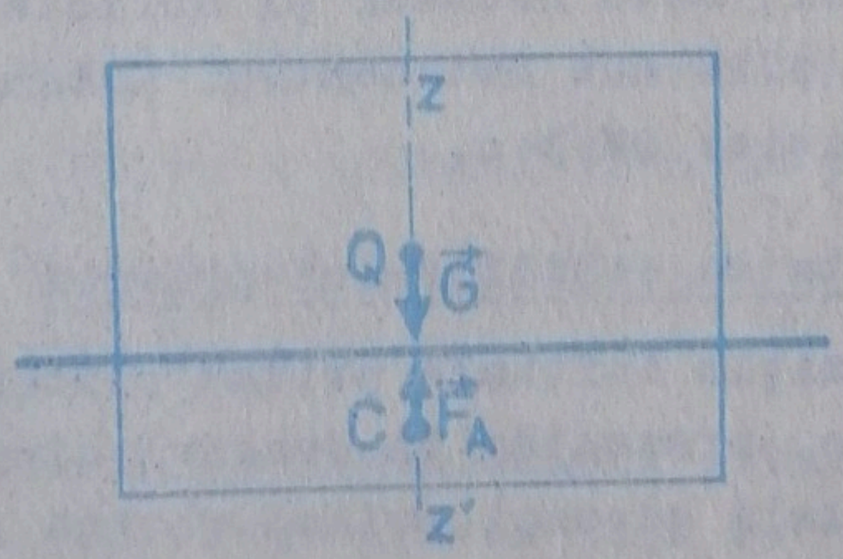


Figura I.89

Notaţii: Q - centrul de greutate al corpului plutitor; C - punctul de aplicaţie al forţei arhimedice (centrul de greutate al volumului de lichid dezlocuit); zz' - direcţia determinată de punctele Q şi C.

In desenul din figura I.9o prezentăm acelaşi corp plutitor, deplasat faţă de poziţia de echilibru.

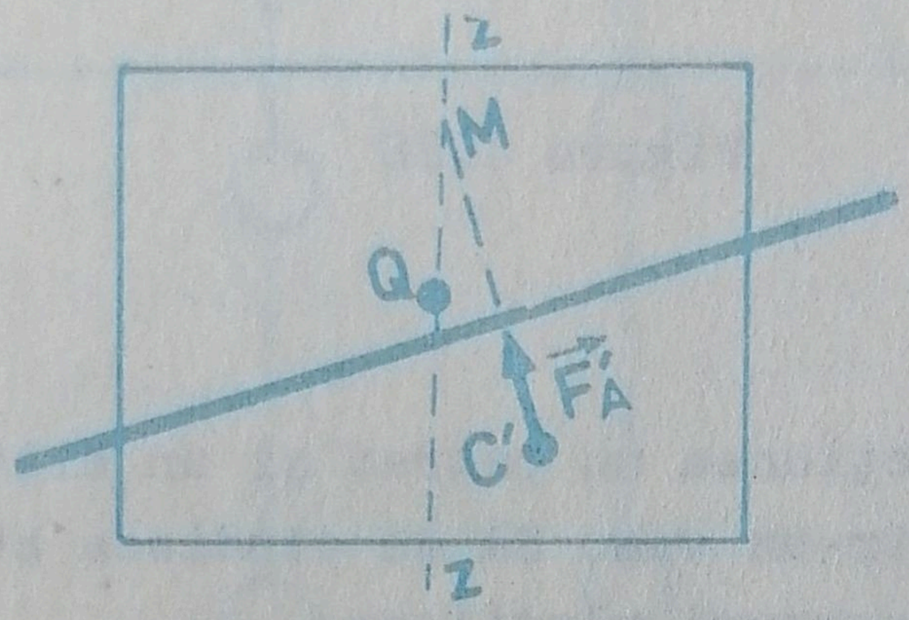


Figura I.9o

Notaţii: C' - punctul de aplicaţie al forţei arhimedice; M - punctul de intersecţie al suportului forţei arhimedice cu direcţia zz'. Punctul M se numeşte metacentru.

Pentru ca un corp solid plutitor să fie într-o poziţie de echilibru stabil, este necesar şi suficient ca centrul său de greutate să se afle sub metacentru. Matematic aceasta se traduce prin condiţia: $QM > o$.

I. Stabilitatea echilibrului prismei

Dacă în poziţia iniţială prisma pluteşte pe una din feţele sale laterale, prezentăm în desenul din figura I.91, în secţiune transversală aceeaşi prismă rotită în jurul axei sale longitudinale cu un unghi θ foarte mic ($\theta \leq 5^\circ$).

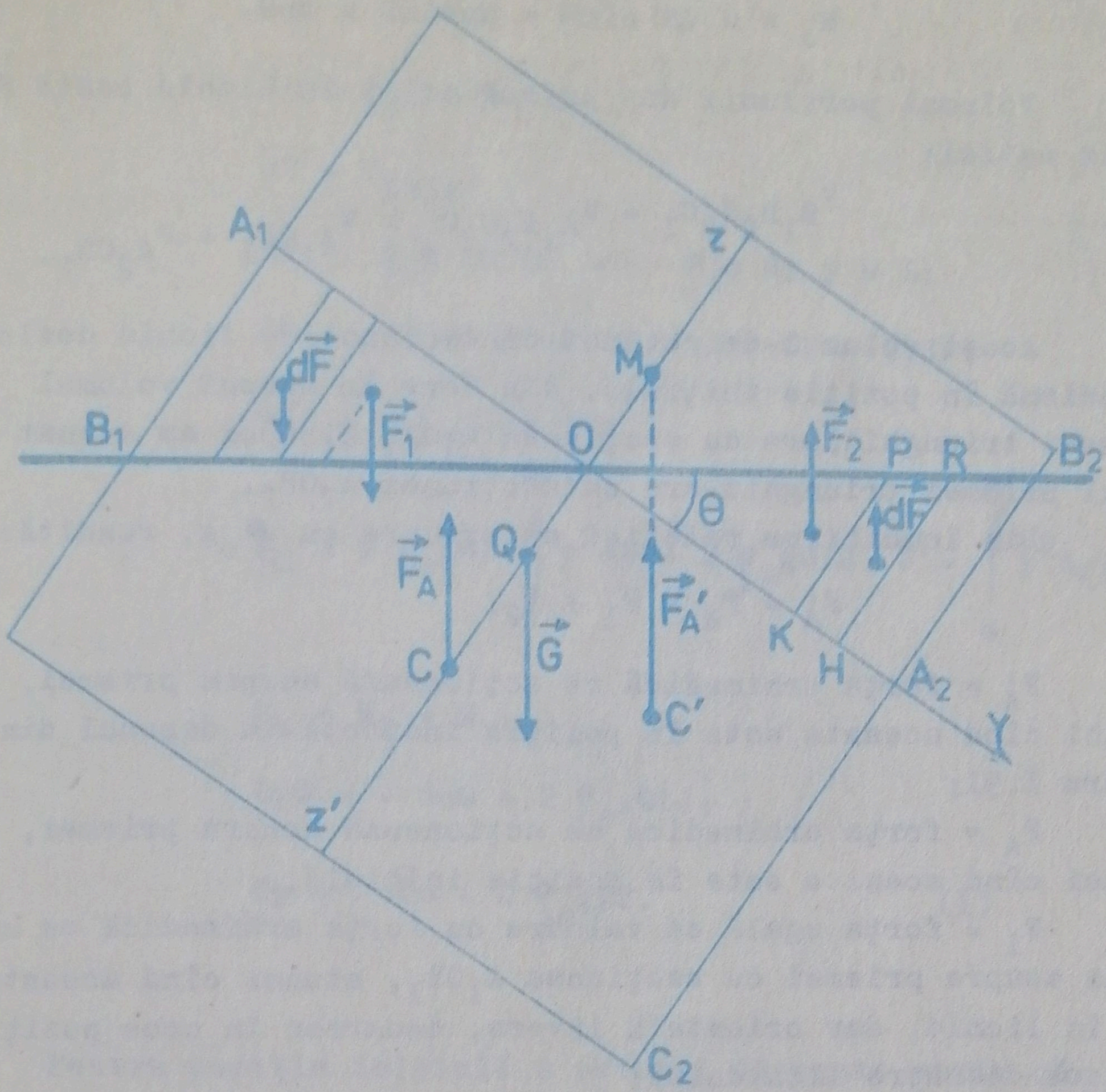


Figura I.91

Vom deduce expresia matematică a segmentului QM pentru un plutitor de forma unei prisme cu lungimea L şi cu baza un pătrat cu latura de lungime a. Densitatea corpului solid este ρ iar densitatea lichidului este $\rho_0 > \rho$.

Notaţii:

A_1A_2 - linia de plutire a prismei în poziţia iniţială;

B_1B_2 - linia de plutire a prismei în noua poziţie;

$QM = p$; $QC = n$; $OK = y$; $OP = y/\cos\theta$;

$KH = dy$; $PR \approx dy$; $KP \approx y\theta$.

In poziţia prezentată în desen asupra prismei acţionează cuplul de forţe $(\vec{G}; \vec{F}_A')$, al cărui moment faţă de metacentrul M este:

$$M_c = G\ QM\ \sin\theta = Gp\sin\theta = Gp\theta.$$

Volumul porţiunii din prismă aflat în lichid poate fi scris astfel:

$$V_{B_1B_2C_2C_1} = V_{A_1A_2C_2C_1} - V_{A_1OB_1} + V_{A_2OB_2}.$$

Acest volum l-am obţinut din volumul de lichid dezlocuit de prismă în poziţia iniţială, din care am scăzut volumul prismei triunghiulare cu secţiunea A_1OB_1 şi apoi am adunat volumul prismei triunghiulare cu secţiunea A_2OB_2.

Din înmulţirea relaţiei anterioare cu $\rho_o g$, rezultă:

$$F'_A = F_A - F_1 + F_2;$$

F'_A = forţa arhimedică ce acţionează asupra prismei, atunci cînd aceasta este în poziţia indicată în desenul din figura I.91;

F_A = forţa arhimedică ce acţionează asupra prismei, atunci cînd aceasta este în poziţia iniţială;

F_1 = forţa egală ca valoare cu forţa arhimedică ce acţiona asupra prismei cu secţiunea A_1OB_1, atunci cînd aceasta era în lichid, dar orientată invers, deoarece în noua poziţie ea este deasupra lichidului;

F_2 = forţa arhimedică ce acţionează asupra prismei cu secţiunea A_2OB_2.

In locul forţelor $\vec{G}$ şi $\vec{F}'_A$ considerăm forţele $\vec{G}$, $\vec{F}_A$, $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$, iar în locul cuplului $(\vec{G};\ \vec{F}'_A)$ considerăm cuplurile: $(\vec{G};\ \vec{F}_A)$ şi $(\vec{F}_1;\ \vec{F}_2)$.

Momentul cuplului $(\vec{G};\ \vec{F}_A)$ faţă de punctul C este:

$$M_1 = - Gn\theta.$$

Semnul minus apare deoarece sensul de rotaţie impus de acest cuplu este invers faţă de cel impus de cuplul iniţial.

Pentru calculul momentului cuplului $(\vec{F}_1;\ \vec{F}_2)$ faţă de punctul O vom calcula mai întîi momentul cuplului $(d\vec{F};\ d\vec{F})$.

Am notat cu $d\vec{F}$ forţa arhimedică ce acţionează asupra elementului de volum al celor două prisme triunghiulare.

$$dF = \rho_o g\, dV;$$

$$dV = V_{KHRP};$$

$$dF = \rho_o g\, KH\, KP\, L = \rho_o g\, dy\, y\, \theta\, L;$$

$$dM_2 = dF\, OP + dF\, OE = 2dF\, OP = 2ydF;$$

$$dM_2 = 2\rho_o g\theta L y^2 dy;$$

$$M_2 = 2\rho_o g\theta L \int_o^{a/2} y^2 dy = 2\rho_o g\theta L J;\quad J = \int_o^{a/2} y^2 dy;$$

$$M_c = M_1 + M_2;$$

$$Gp\theta = -Gn\theta + 2\rho_o g\theta L J;$$

$$Gp = -Gn + 2\rho_o g L J. \qquad (1)$$

Pentru poziţia iniţială a prismei se poate scrie că:

$$G = F_A;$$

$$F_A = \rho_o g V A_1 A_2 C_2 C_1 = \rho_o g V_o;$$

$$G = \rho_o g V_o.$$

Introducînd în relaţia (1), rezultă:

$$\rho_o g V_o p = -\rho_o g V_o n + 2\rho_o g L J;$$

$$V_o(p + n) = 2LJ;$$

$$p = \frac{2LJ}{V_o} - n. \qquad (2)$$

Cazul 1

Prisma pluteşte pe una din feţele laterale, aşa cum indică desenul din figura I.92.

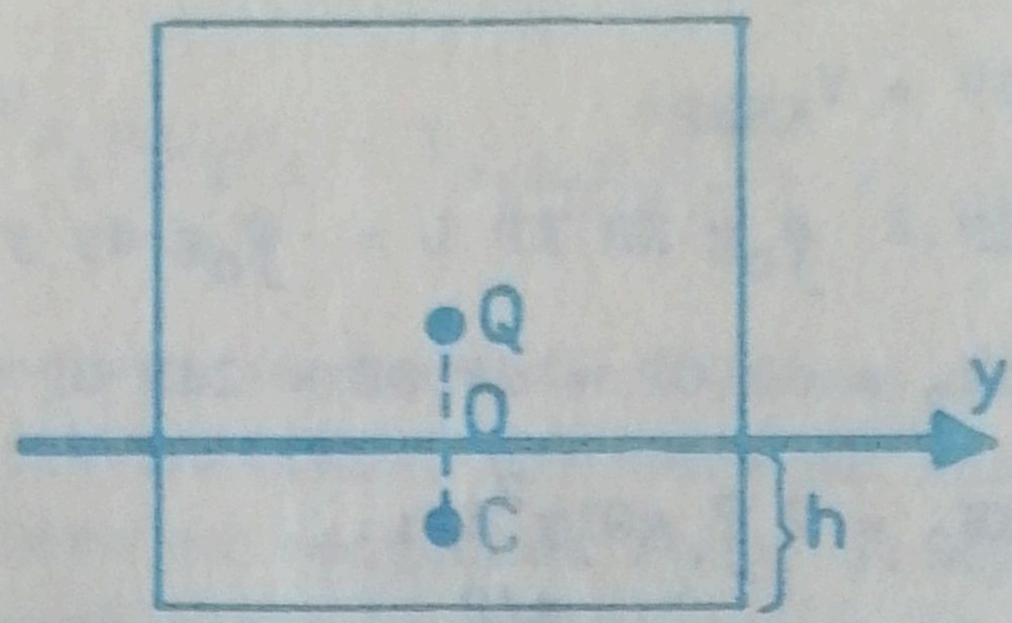


Figura I.92

$$J = \int_0^{a/2} y^2 dy = a^3/24;$$

$$G = F_A;\ \rho ga^2L = \rho_0 gahL;$$

$$h = \rho a/\rho_0 = ad;\ d = \rho/\rho_0;$$

$$V_0 = ahL = a^2Ld;$$

$$n = (a - h)/2;$$

$$p = a(6d^2 - 6d + 1)/12d.$$

Pentru ca în poziţia prezentată în desenul din figura I.92 prisma să se afle în echilibru stabil, trebuie îndeplinită condiţia:

$$p > o;$$

$$6d^2 - 6d + 1 > o.$$

Aplicînd regula semnului trinomului de gradul 2, rezultă că această inegalitate este adevărată pentru valori ale lui d cuprinse în afara intervalului dintre rădăcinile ecuaţiei:

$$6d^2 - 6d + 1 = o.$$

Deci pentru $d < o,212$ şi pentru $d > o,788$, prisma care pluteşte pe una din feţele laterale se află în echilibru stabil.

Cazul 2

Prisma pluteşte cu una din muchii în interiorul lichidului, aşa cum indică desenul din figura I.93.

$$J = \int_0^h y^2 dy = h^3/3;$$

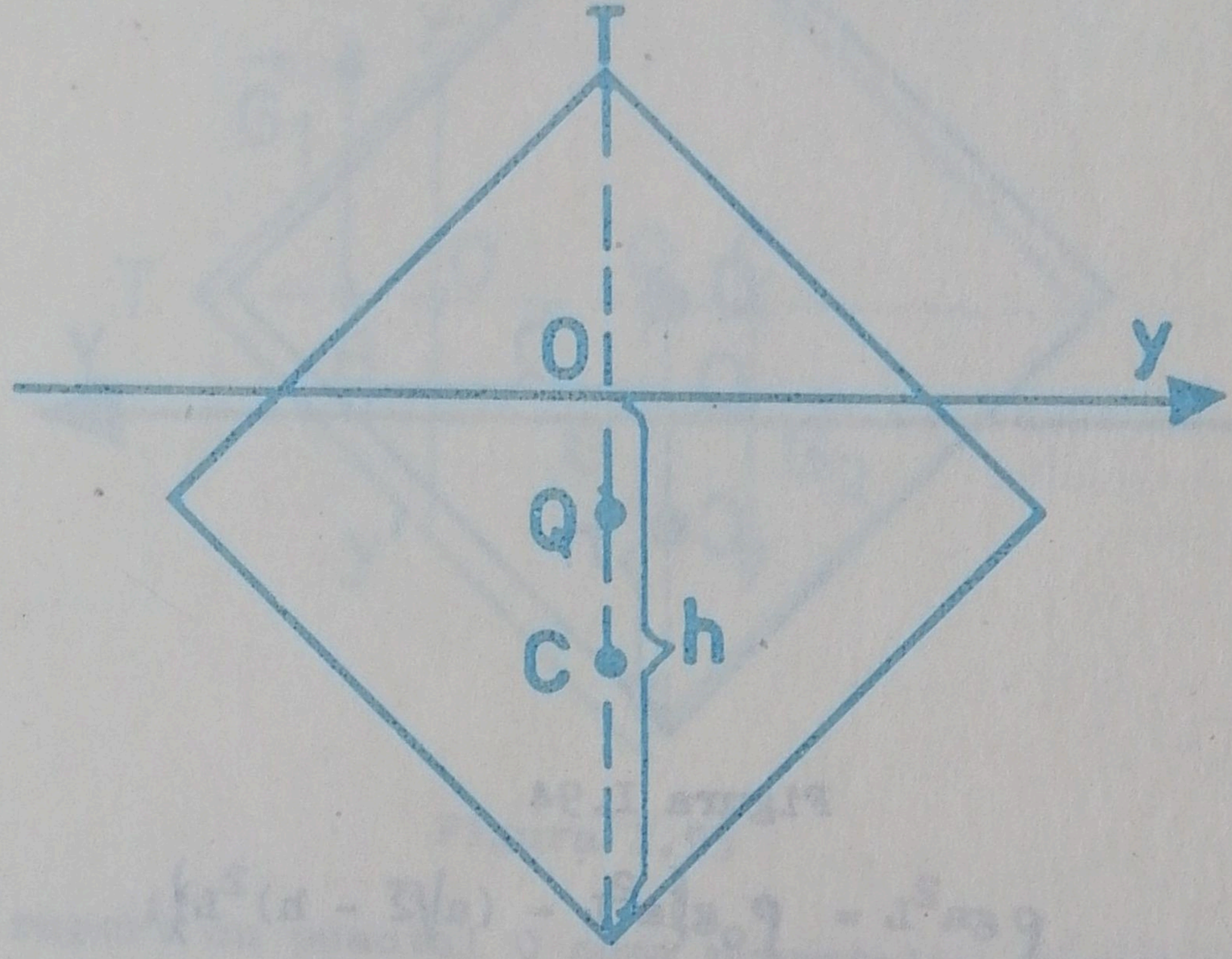


Figura I.93

$G = F_A$; $\rho g a^2 L = \rho_o g h^2 L$; $h^2 = a^2 d$;

$V_o = Lh^2 = a^2 Ld$;

$n = \sqrt{2}\, a/2 - 2h/3$;

$p = a(4\sqrt{d}/3 - \sqrt{2}/2$.

Din condiţia: $p > o$, rezultă că pentru $d > o,281$ prisma care pluteşte cu una din muchii în interiorul lichidului se află în echilibru stabil.

Cazul 3

Prisma pluteşte cu trei muchii în interiorul lichidului,

aşa cum indică desenul din figura I.94.

$$TO = a\sqrt{2} - h;$$

$$V_o = a^2L - (a\sqrt{2} - h)^2L;$$

$$G = F_A;$$

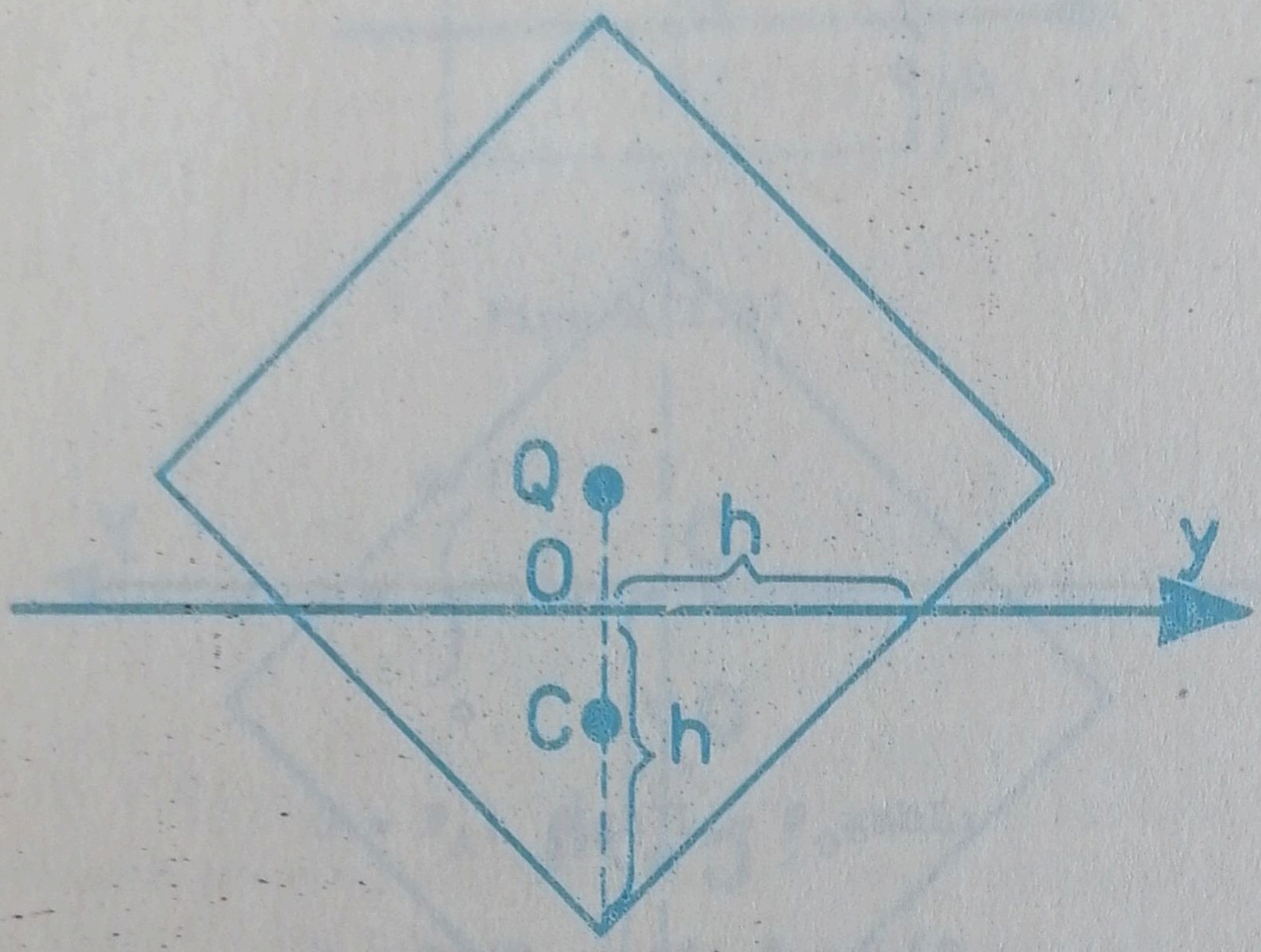


Figura I.94

$$\rho g a^2 L = \rho_o g\{a^2 L - (a\sqrt{2} - h)^2 L\};$$

$$h^2 - 2a\sqrt{2}h + (d + 1)a^2 = o;$$

$$h = a(\sqrt{2} - \sqrt{1 - d});$$

$$J = \int_o^{a\sqrt{2}-h} y^2 dy = \frac{1}{3}(a\sqrt{2} - h)^3 = \frac{1}{3}a^3(1 - d)\sqrt{1 - d};$$

$$V_o = a^2 L d.$$

Pentru calculul poziţiei centrului de greutate al porţiunii scufundate în lichid, să considerăm că din prisma data se decupează prisma cu secţiunea triunghiulară yTy', al cărui centru de greutate, în desenul din figura I.95, este notat B.

A decupa această prismă este echivalent cu a trage din B, pe verticală în sus, cu o forţă egală ca valoare cu greutatea $\vec{G}_1$ a prismei triunghiulare. Greutatea porţiunii scufundate este $\vec{G}_2$, iar a prismei date este $\vec{G}$.

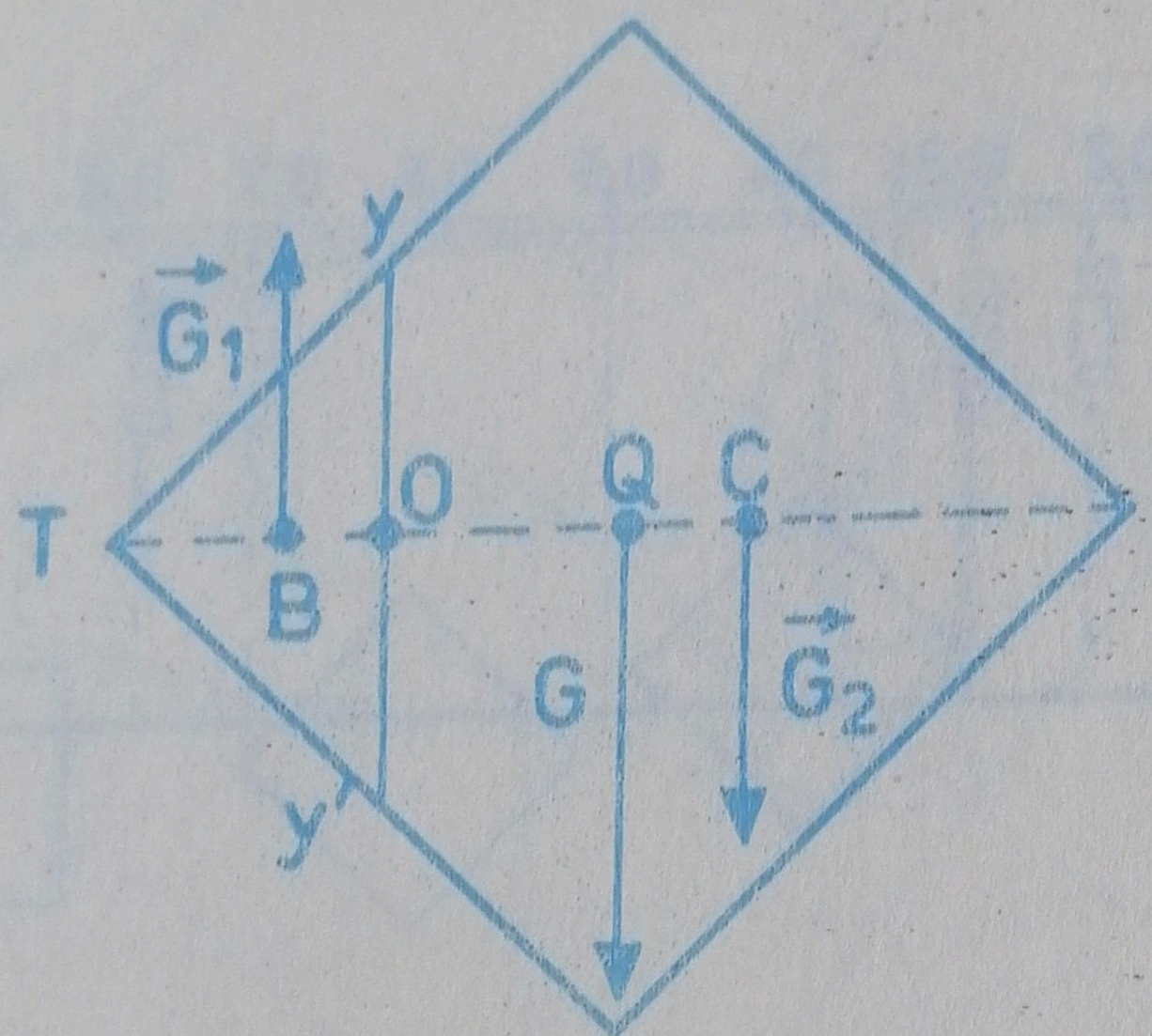


Figura I.95

In raport cu punctul C suma momentelor forţelor $\vec{G}_1$ şi $\vec{G}$ trebuie să fie nulă. Rezultă:

$$G_1 BC = G\ QC;$$

$$G_1(BO + OQ + QC) = G\ QC;$$

$$G_1(\tfrac{1}{3}\ TO + TQ - TO + QC) = G\ QC;$$

$$n = \frac{a(1 - d)}{d}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{1 - d}}{3}\right);$$

$$p = \frac{2(1 - d)}{d}\left(\frac{4\sqrt{1 - d}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Din condiţia: $p > o$, rezultă că pentru $d < o,718$ prisma care pluteşte cu trei muchii în interiorul lichidului se află în echilibru stabil.

In desenul din figura I.96 sînt prezentate poziţiile de echilibru stabil ale prismei, studiate în funcţie de valorile lui d.

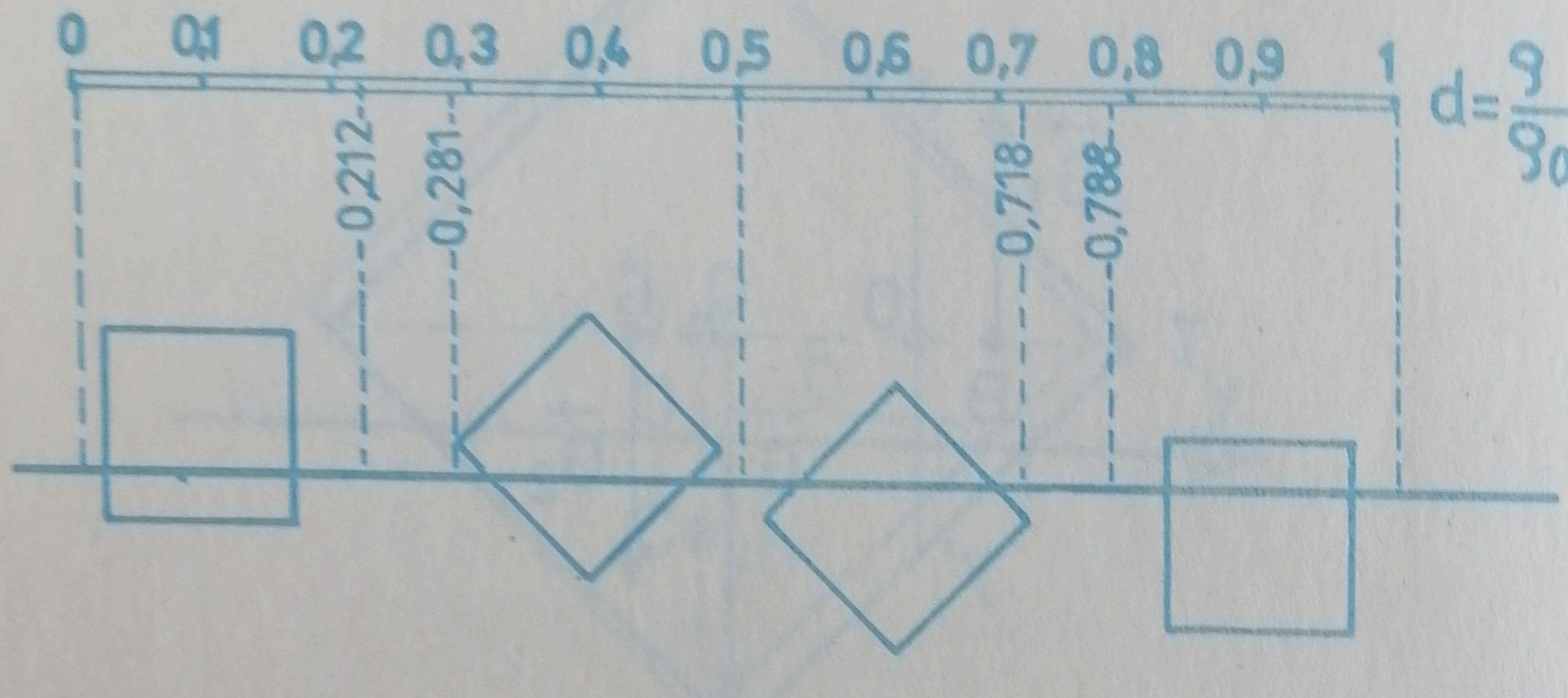


Figura I.96

Pentru valori ale lui d care satisfac condiţiile:

$$o,212 < d < o,281;$$

$$o,718 < d < o,788,$$

echilibrul prismei nu poate fi stabil în nici o poziţie.

II. Stabilitatea echilibrului cilindrului

Dacă în poziţia iniţială cilindrul pluteşte în poziţie verticală, în desenul din figura I.97 prezentăm acelaşi cilindru înclinat faţă de verticală cu un unghi θ foarte mic ($\theta \leq 5^{o}$).

Procedînd ca şi în cazul prismei, rezultă:

$$M_c = Gp\theta;$$

$$M_1 = - gmn\theta = - Gn\theta.$$

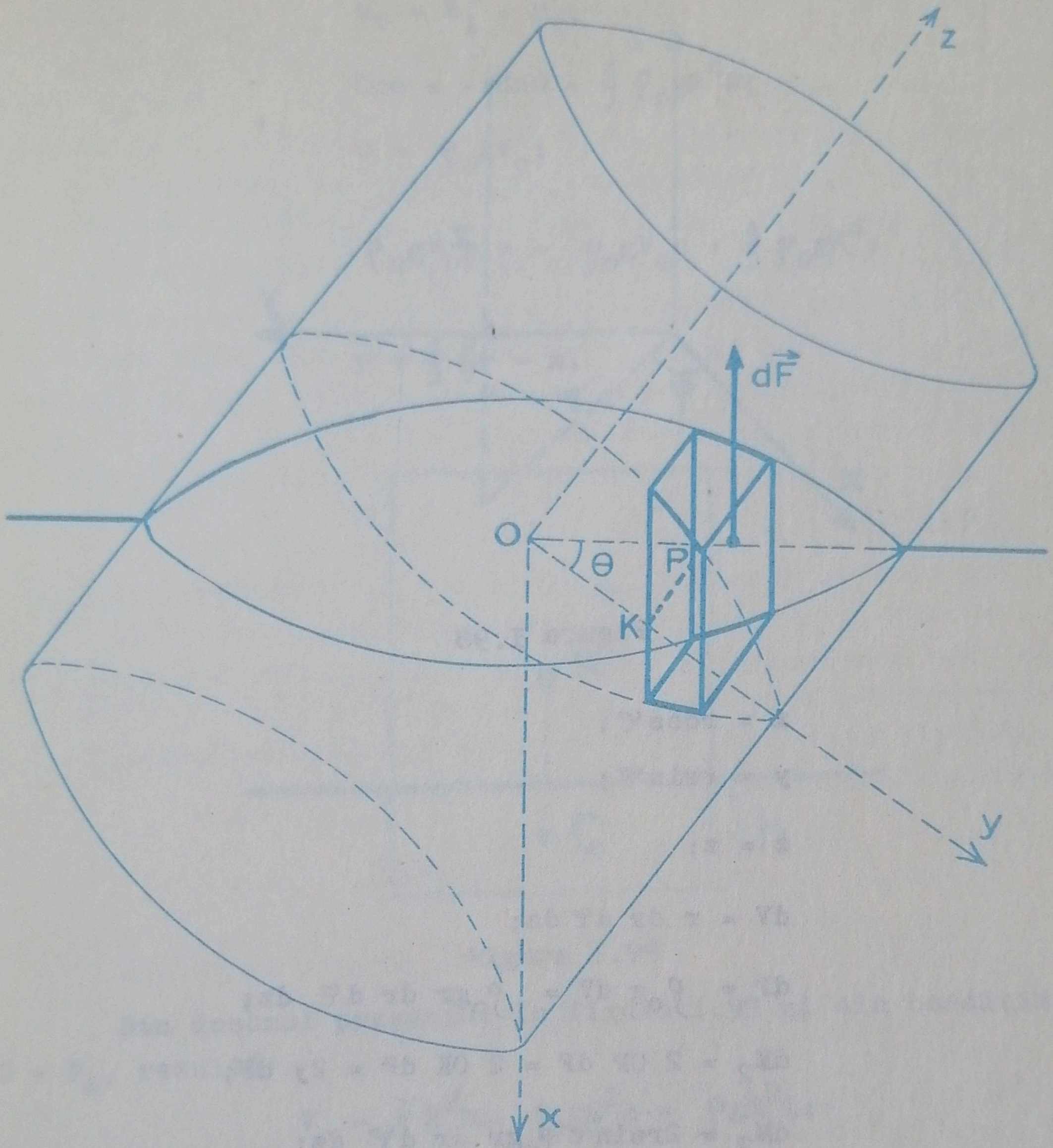


Figura I.97

Pentru calculul momentului cuplului ($d\vec{F}$; $d\vec{F}$) vom lucra în coordonate cilindrice, folosind desenul din figura I.98.

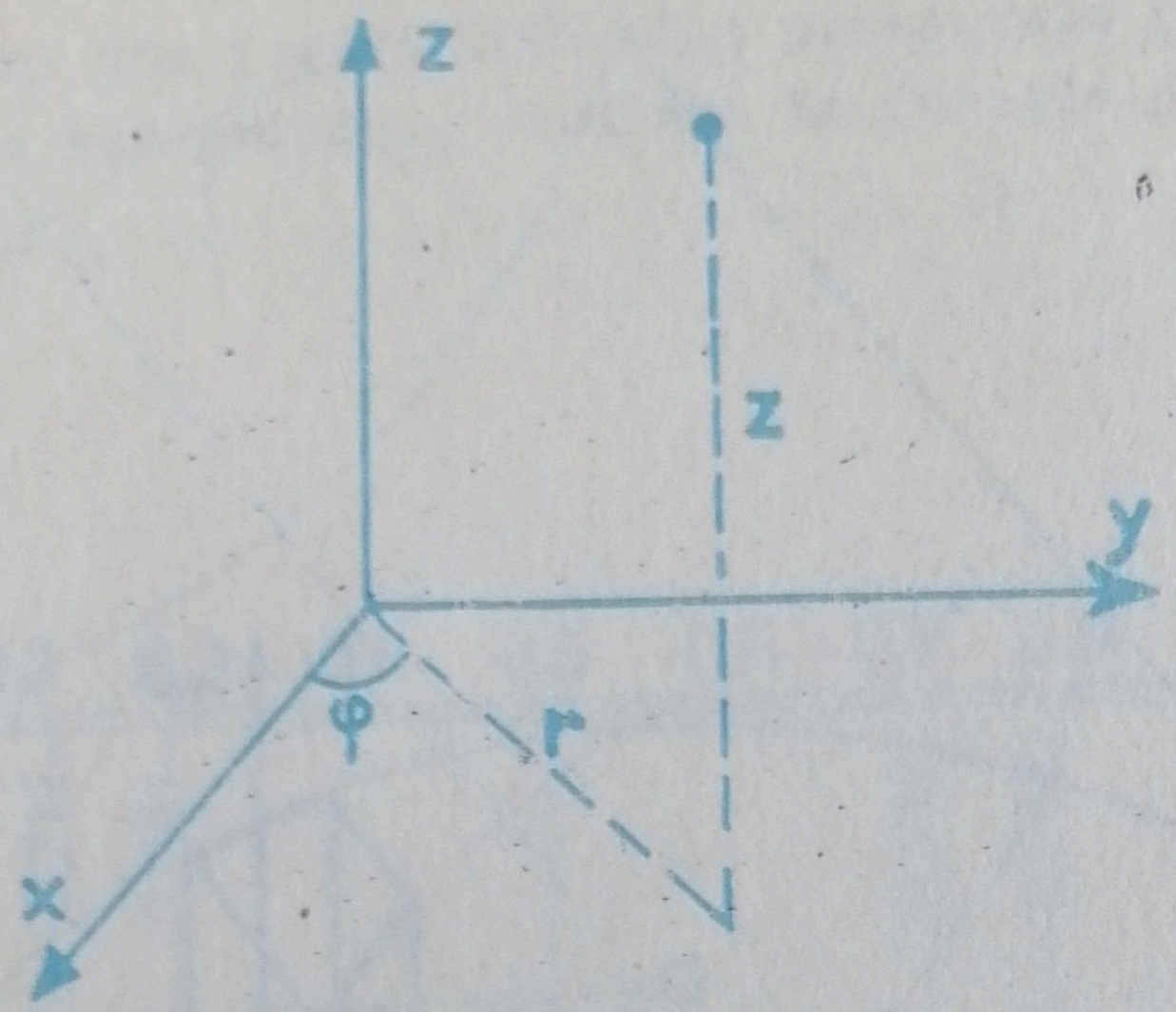


Figura I.98

$$x = r\cos\varphi;$$

$$y = r\sin\varphi;$$

$$z = z;$$

$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz;$$

$$dF = \rho_0 g\,dV = \rho_0 g r\,dr\,d\varphi\,dz;$$

$$dM_2 = 2\,OP\,dF = 2\,OK\,dF = 2y\,dF;$$

$$dM_2 = 2r\sin\varphi\,\rho_0 g r\,dr\,d\varphi\,dz;$$

$$tg\theta = z_{max}/R = \theta \text{ (deoarece } \theta \text{ este foarte mic)};$$

$$z_{max} = R\theta;$$

$$M_2 = 2\rho_0 g \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^{R} r^2 dr \int_0^{R\theta} dz;$$

$$M_2 = \frac{4}{3}\rho_0 g R^4 \theta;$$

$$M_c = M_1 + M_2;$$

$$Gp\theta = - Gn\theta + \frac{4}{3} \rho_o g R^4 \theta;$$

$$G = \rho_o g V_o;$$

$$\rho_o g V_o p = - \rho_o g V_o n + \frac{4}{3} \rho_o g R^4;$$

$$p = \frac{4}{3} \frac{R^4}{V_o} - n.$$

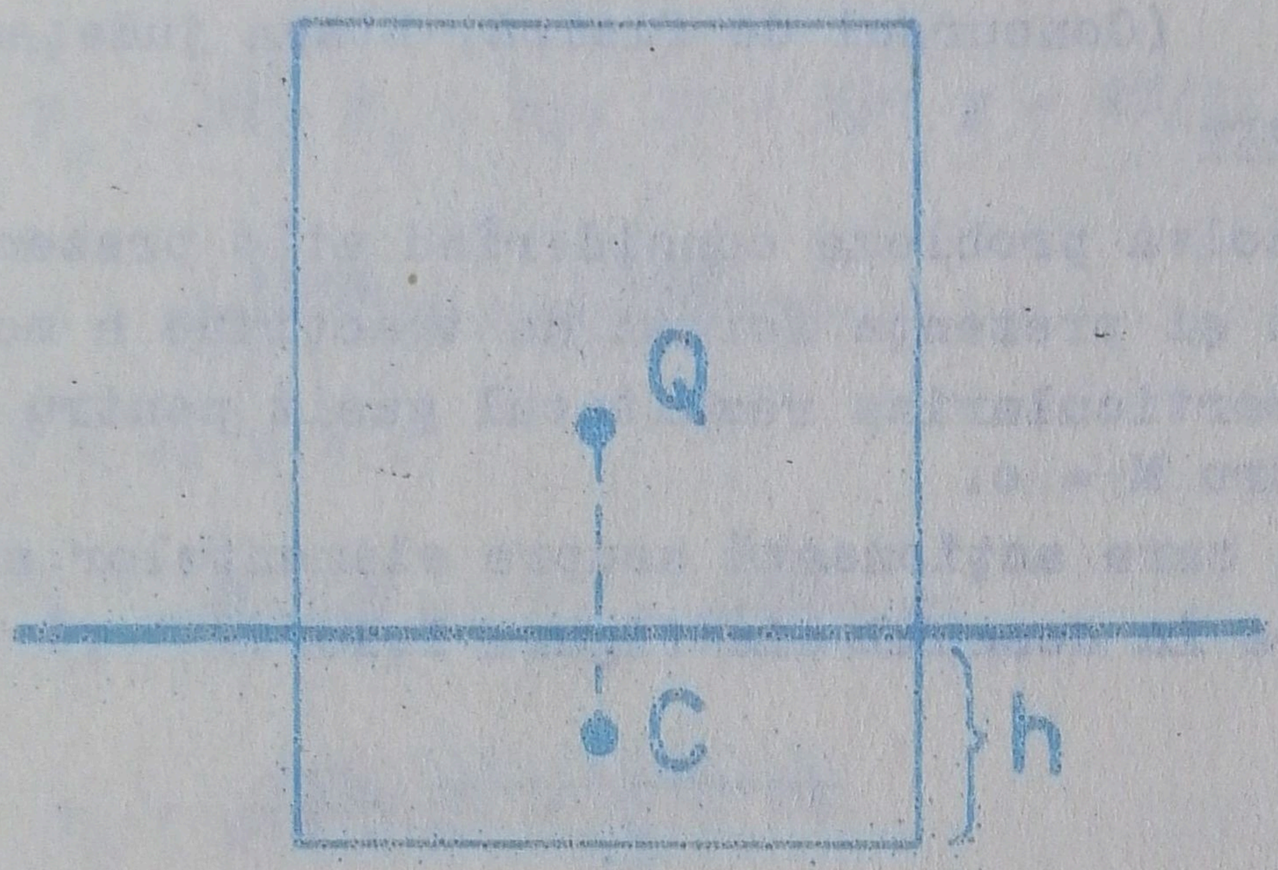


Figura I.99

Din desenul prezentat în figura I.99 şi din condiţia: $G = F_A$, rezultă:

$$V_o = \pi R^2 h; \quad \rho_o g R^2 h = \rho g R^2 L;$$

$$h = Ld; \quad V_o = \pi R^2 Ld;$$

$$QC = n = \frac{L}{2} - \frac{h}{2} = \frac{L}{2}(1 - d);$$

$$p = \frac{4R^2}{3\pi Ld} - \frac{L}{2}(1 - d).$$

Pentru ca echilibrul să fie stabil trebuie ca: $p > o$.

Un cilindru a cărui densitate relativă este $d = o,5$ va pluti în poziţie verticală în echilibru stabil, dacă lungimea sa satisface condiţia:

$$L < o,94\ D, \text{ unde } D = 2R.$$

Problema 56

De un resort elastic suspendat într-un punct este atîrnat un scripete de masă neglijabilă. De un capăt al firului petrecut peste scripete este legat un corp de masă m = 2 kg, iar la celălalt capăt al firului se leagă, într-un caz un corp cu masa M = 2o kg, în alt caz şaiba unui motor electric care dezvoltă în fir o forţă de tracţiune de 2oo N. Neglijînd orice fel de frecare, considerînd g = lo m/s^2 şi cunoscînd că resortul are k = loo N/cm, să se determine cît se alungeşte resortul în cele două cazuri. Justificaţi de ce este (sau nu este) aceeaşi alungire în cele două cazuri.

(Concursul de fizică, Etapa judeţeană, 1974)

Rezolvare

Vom rezolva problema considerînd atît prezenţa corpului cu masa M, cît şi prezenţa forţei de tracţiune a motorului ($\vec{F}$). In final vom particulariza rezultatul găsit pentru F = o şi respectiv pentru M = o.

Forţele care acţionează asupra elementelor sistemului sînt prezentate în desenul din figura I.loo.

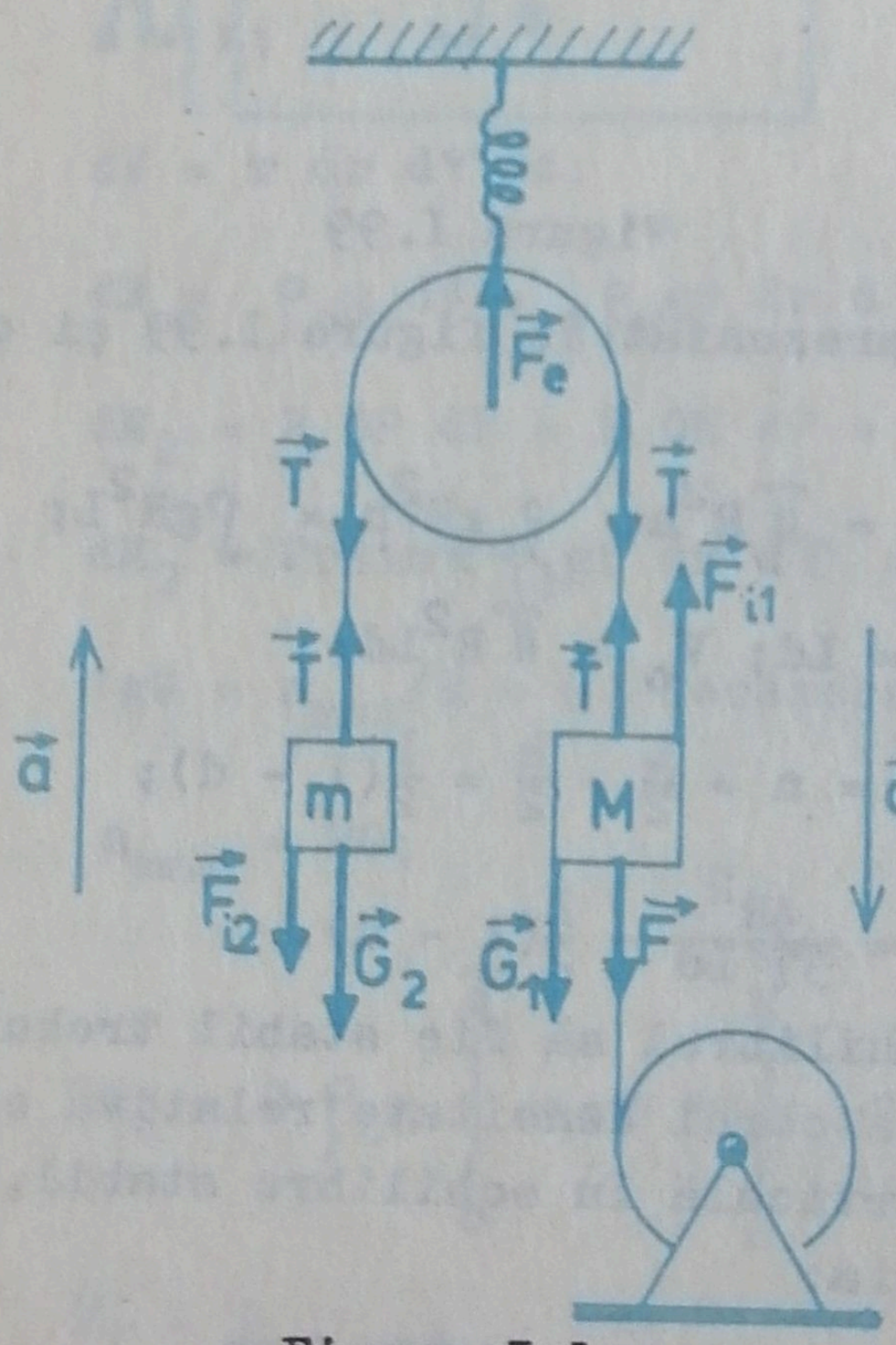


Figura I.loo

Folosind principiul lui d'Alembert, rezultă:

$$\vec{F}_{i2} + \vec{G}_2 + \vec{T} = o;$$

$$\vec{G}_1 + \vec{F} + \vec{F}_{i1} + \vec{T} = o;$$

$$-ma - mg + T = o;$$

$$Mg + F - Ma - T = o;$$

$$a = \frac{M - m}{M + m} g + \frac{F}{M + m};$$

$$T = \frac{2mM}{M + m} g + \frac{mF}{M + m};$$

$$F_e = 2T;\ F_e = ky;\ 2T = ky;\ y = 2T/k;$$

$$y = \frac{4mMg}{k(M + m)} + \frac{2mF}{k(M + m)}.$$

Cazul I: $F = o;\ M \neq o$

$$a_1 = \frac{M - m}{M + m} g;\ T_1 = \frac{2mM}{M + m} g;$$

$$y_1 = \frac{4mMg}{k(M + m)} = 8/11 \text{ cm}.$$

Cazul II: $F \neq o;\ M = o$

$$a_2 = \frac{F}{m} - g;\ T_2 = F;\ y_2 = 2F/k = 4 \text{ cm};$$

$$y_2 > y_1.$$

Justificare

Rezultanta forţelor externe, care îi imprimă sistemului acceleraţie, este aceeaşi în ambele cazuri:

$$Mg - mg = F - mg = 18oN,$$

dar masa sistemului nu este aceeaşi în ambele cazuri. In primul caz masa sistemului este M + m, iar în cazul al doilea masa sistemului se reduce la masa corpului m. Ca urmare acceleraţiile sînt diferite, deci şi tensiunile sînt diferite.

Deoarece y este proporţional cu acceleraţia sistemului:

$$y = \frac{2}{k}(a + g),$$

înseamnă că resortul se va alungi cel mai mult atunci cînd acceleraţia sistemului este mare.

Problema 57

Un om se află în repaus, în poziţie verticală, pe un scaun în formă de disc cu raza R_1 şi masa m_1, care se poate roti fără frecare în jurul axului central vertical. El ţine deasupra capului, în poziţie verticală, axul altui disc cu raza R_2 şi masa m_2, aflat în repaus. Un dispozitiv automat montat pe axul discului superior îi imprimă acestui disc o mişcare de rotaţie în jurul axei sale verticale.

Stiind că la periferia fiecărui disc este montat cîte un pendul, cu lungimea L_1 şi respectiv L_2, ale căror fire formează cu verticala unghiul θ_1 şi respectiv θ_2, să se calculeze momentul de inerţie al omului faţă de axul central vertical.

Rezolvare

I_1 = momentul de inerţie al discului inferior, faţă de axul central vertical;

I_2 = momentul de inerţie al discului superior, faţă de axul central vertical;

I = momentul de inerţie al omului, faţă de axul central vertical;

$$I_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2}; \quad I_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Inainte de acţionarea dispozitivului amintit întregul sistem este în repaus faţă de sol, deci momentul cinetic al sistemului este nul.

Dispozitivul montat pe axul discului superior permite destinderea unui arc elastic şi în acest fel eliberarea energiei potenţiale înmagazinată în el. Inexistenţa frecărilor face ca această energie să fie regăsită în energia mişcării de rotaţie pe care o dobîndesc elementele sistemului.

Sistemul om - discuri fiind izolat de exterior (în plan orizontal) momentul său cinetic trebuie să se conserve. Din acest motiv cele două discuri vor dobîndi mişcări de rotaţie în sensuri opuse.

Din legea conservării momentului cinetic, rezultă:

$$(I + I_1)\omega_1 = I_2\omega_2;$$

$$I = I_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} - I_1.$$

Din desenul prezentat în figura I.lol, rezultă:

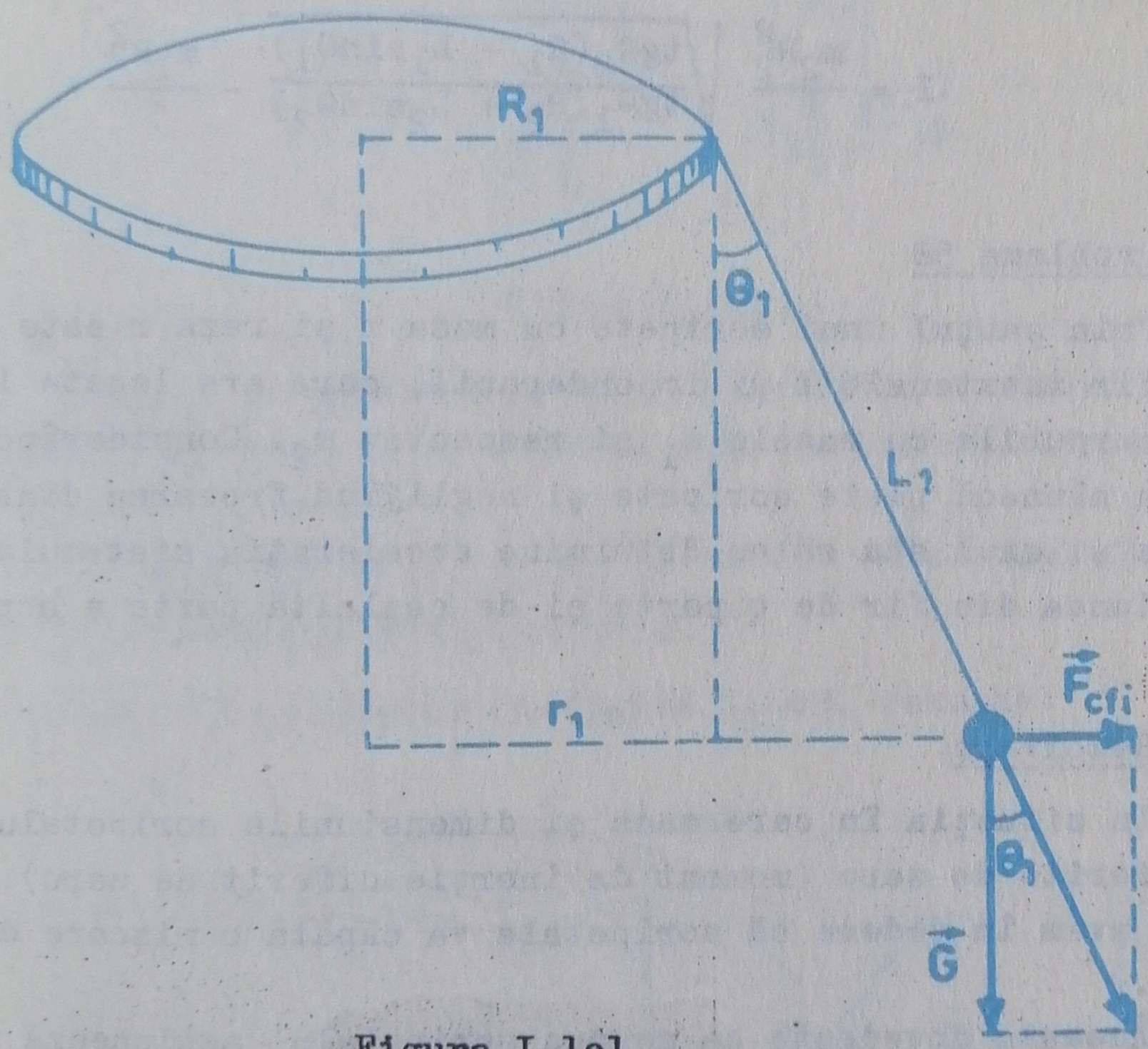


Figura I.lol

$$\sin\theta_1 = r_1/L_1;$$

$$tg\theta_1 = \frac{F_{cfi}}{G} = \frac{mv_1^2}{(R_1 + r_1)mg} = \frac{v_1^2}{(R_1 + r_1)g};$$

$$tg\theta_1 = \frac{v_1^2}{(R_1 + r_1)^2} \frac{R_1 + r_1}{g};$$

$$tg\theta_1 = \omega_1^2 \frac{R_1 + r_1}{g} = \omega_1^2 \frac{R_1 + L_1 \sin\theta_1}{g};$$

$$\omega_1^2 = \frac{g tg\theta_1}{R_1 + L_1 \sin\theta_1}.$$

In mod asemănător se calculează:

$$\omega_2^2 = \frac{g tg\theta_2}{R_2 + L_2 \sin\theta_2}.$$

Rezultă:

$$I = \frac{m_2 R_2^2}{2} \sqrt{\frac{tg\theta_2 (R_1 + L_1 \sin\theta_1)}{tg\theta_1 (R_2 + L_2 \sin\theta_2)}} - \frac{m_1 R_2^2}{2}.$$

Problema 58

Prin şanţul unui scripete cu masa m şi raza r este trecut un fir inextensibil şi imponderabil, care are legate la capete corpurile cu masele m_1 şi respectiv m_2. Considerînd că firul nu alunecă peste scripete şi neglijînd frecarea dintre scripete şi axul său să se determine acceleraţia sistemului şi tensiunea din fir de o parte şi de cealaltă parte a scripetelui.

Rezolvare

In situaţia în care masa şi dimensiunile scripetelui sînt diferite de zero (moment de inerţie diferit de zero), trebuie să avem în vedere că scripetele va căpăta o mişcare de rotaţie.

Aceasta dovedeşte că asupra scripetelui acţionează mai multe forţe, al căror moment rezultant faţă de centrul scripetelui este diferit de zero.

Deoarece firul nu alunecă prin şanţul scripetelui, acceleraţia tangenţială a unui punct de la periferia discului este aceeaşi cu acceleraţia liniară a sistemului de corpuri.

In desenul din figura I.1o2 sînt reprezentate forţele care acţionează asupra elementelor sistemului, inclusiv forţele de inerţie.

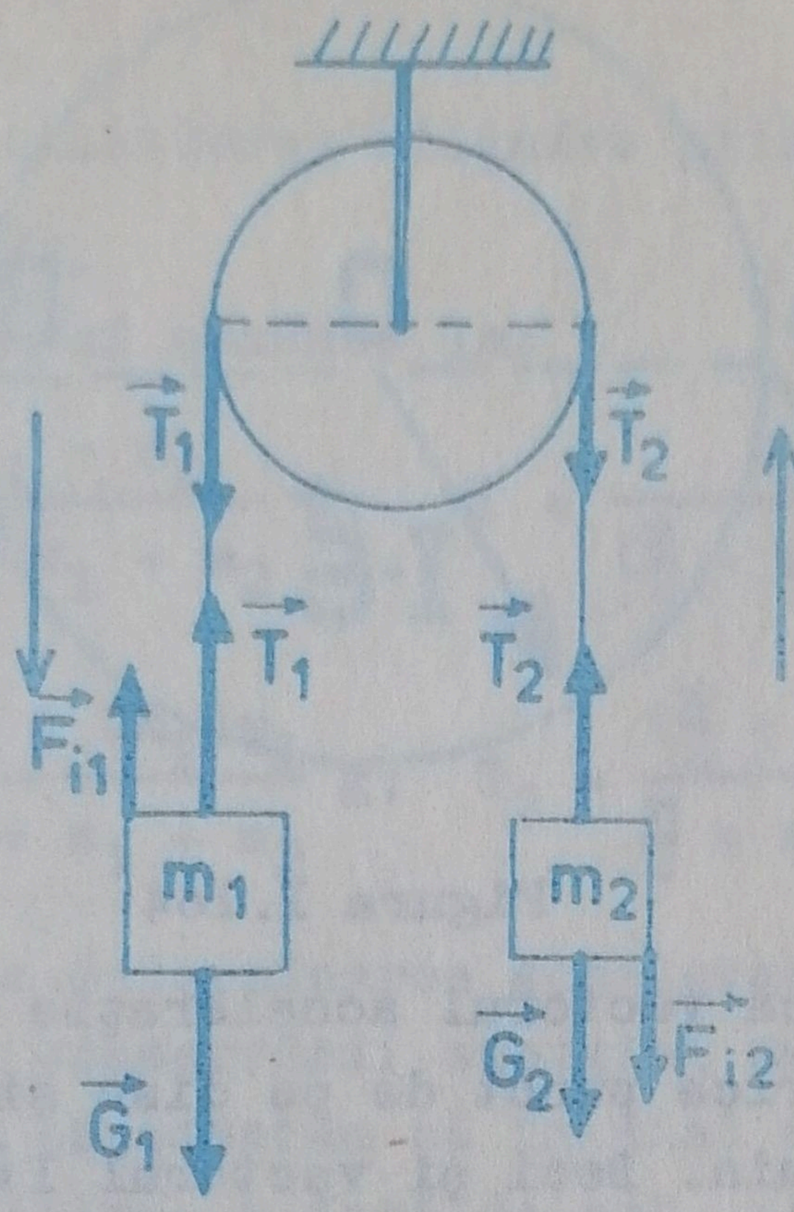


Figura I.1o2

Pentru ca scripetele să se poată roti trebuie ca momentul rezultant al celor două tensiuni faţă de centrul discului să fie diferit de zero.

Să presupunem că $m_1 > m_2$, astfel că scripetele se va roti în sens direct trigonometric.

Din desenul prezentat în figura I.1o3, rezultă:

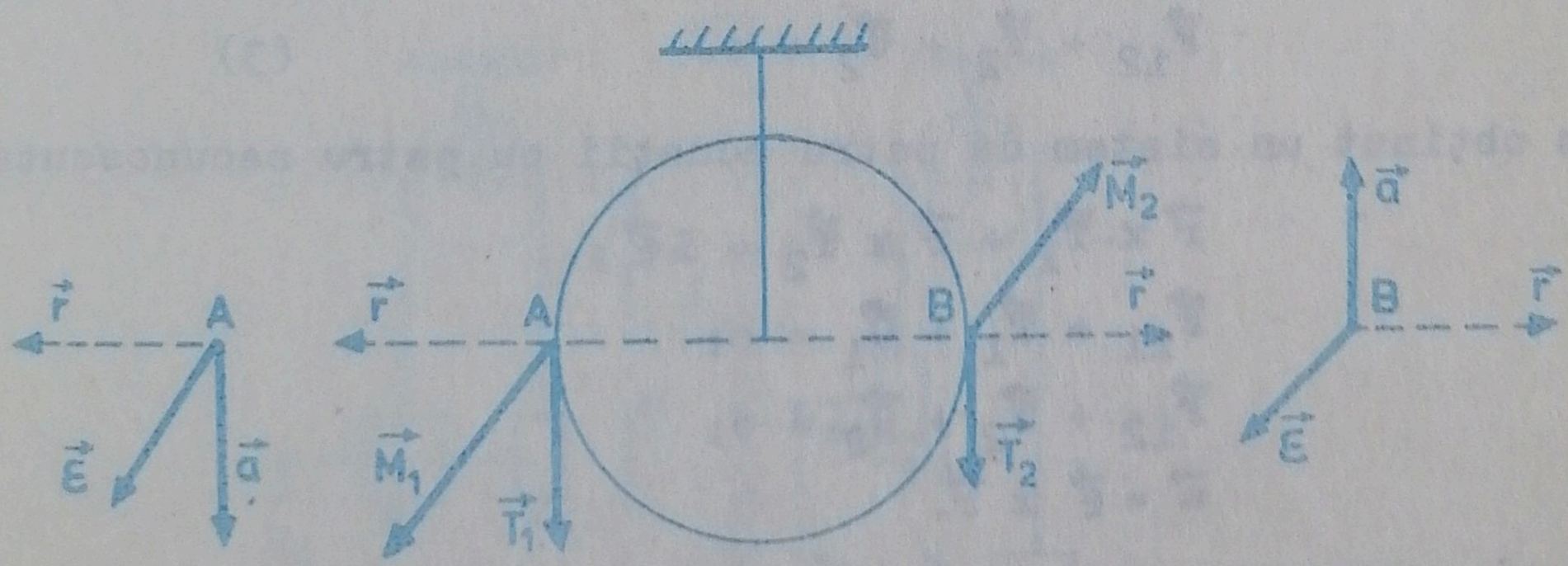


Figura I.1o3

$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{T}_1$; $\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{T}_2$; $\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$.

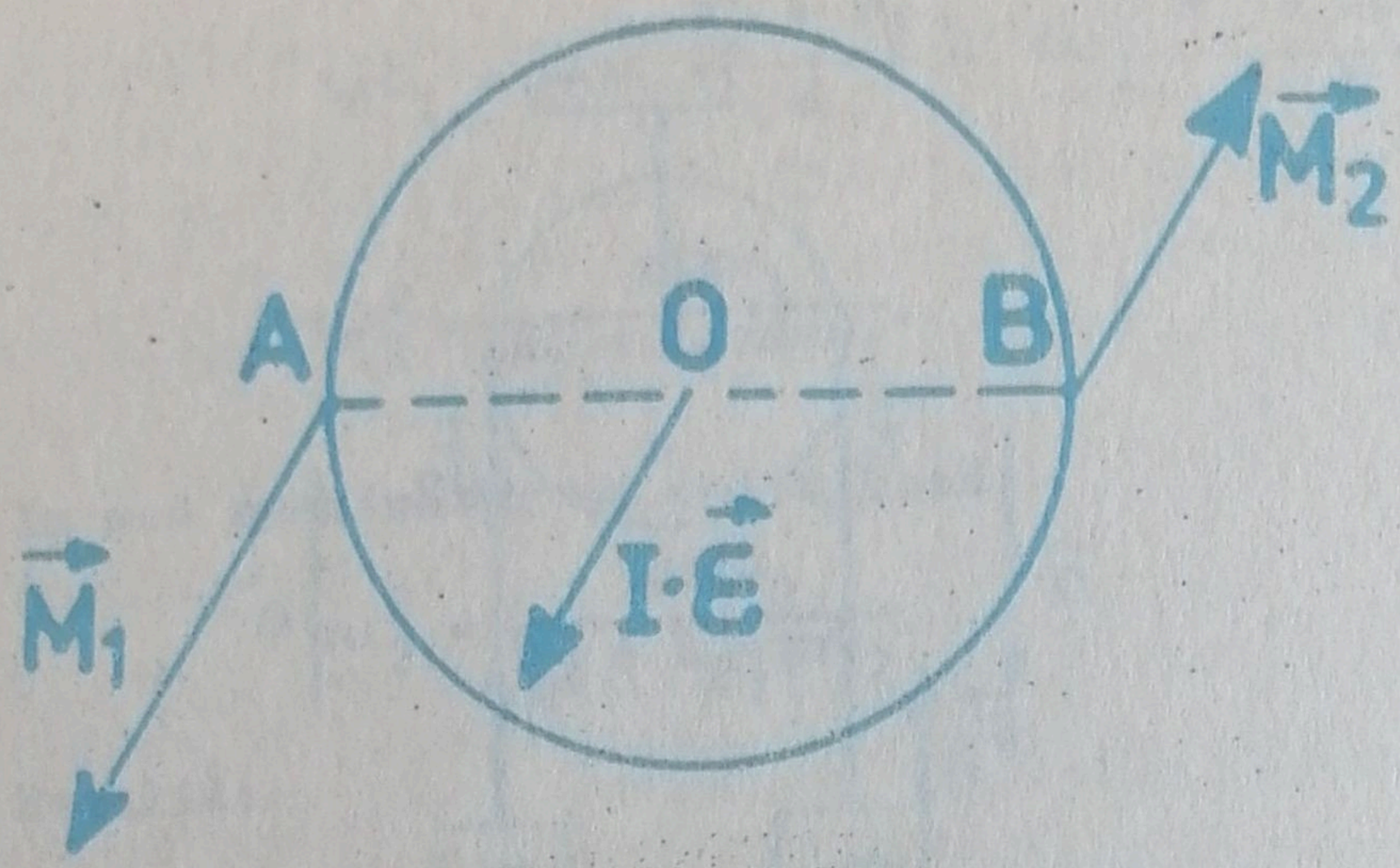


Figura I.1o4

Se observă că vectorul acceleraţie unghiulară are aceeaşi orientare pentru orice punct de pe disc şi anume perpendicular pe suprafaţa acestuia. Deci şi vectorul $I\vec{\varepsilon}$ va avea aceeaşi orientare.

Din principiul fundamental al dinamicii aplicat la mişcarea de rotaţie, folosind desenul din figura I.1o4, rezultă:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = I\vec{\varepsilon};$$

$$\vec{r} \times \vec{T}_1 + \vec{r} \times \vec{T}_2 = I\vec{\varepsilon}. \qquad (1)$$

Principiul lui d'Alembert scris pentru corpurile cu masele m_1 şi m_2, conduce la:

$$\vec{F}_{i1} + \vec{T}_1 + \vec{G}_1 = o; \qquad (2)$$

$$\vec{F}_{i2} + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 = o. \qquad (3)$$

Am obţinut un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute:

$$\vec{r} \times \vec{T}_1 + \vec{r} \times \vec{T}_2 = I\vec{\varepsilon};$$

$$\vec{F}_{i1} + \vec{T}_1 + \vec{G}_1 = o;$$

$$\vec{F}_{i2} + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 = o;$$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}.$$

Necunoscutele sistemului sînt: T_1, T_2, a şi ε
Rezultă:

$$r(T_1 - T_2) = I\varepsilon;$$

$$-m_1 a - T_1 + m_1 g = o;$$

$$-m_2a + T_2 - m_2g = 0;$$

$$a = \varepsilon r.$$

Pentru scripete, considerat cilindru plin, cunoaştem:

$$I = mr^2/2.$$

Rezolvarea sistemului conduce la:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2} g; \quad \varepsilon = \frac{m_1 - m_2}{(\frac{m}{2} + m_1 + m_2)r} g;$$

$$T_1 = \frac{(\frac{m}{2} + 2m_2)m_1}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2} g; \quad T_2 = \frac{(\frac{m}{2} + 2m_1)m_2}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2} g.$$

Observaţie: pentru determinarea acceleraţiei sistemului se poate folosi şi legea conservării energiei mecanice.

Pentru aceasta să considerăm că iniţial cele două corpuri se află în repaus la înălţimea h faţă de sol, iar scripetele, şi el în repaus, la înălţimea H, aşa cum indică desenul din figura I.1o5. In această stare sistemul are numai energie potenţială gravitaţională.

Eliberînd sistemul, după un anumit timp, energia totală a acestuia este o sumă de energii potenţiale gravitaţionale, energii cinetice de translaţie şi energie cinetică de rotaţie. Energia totală a sistemului trebuie să se conserve.

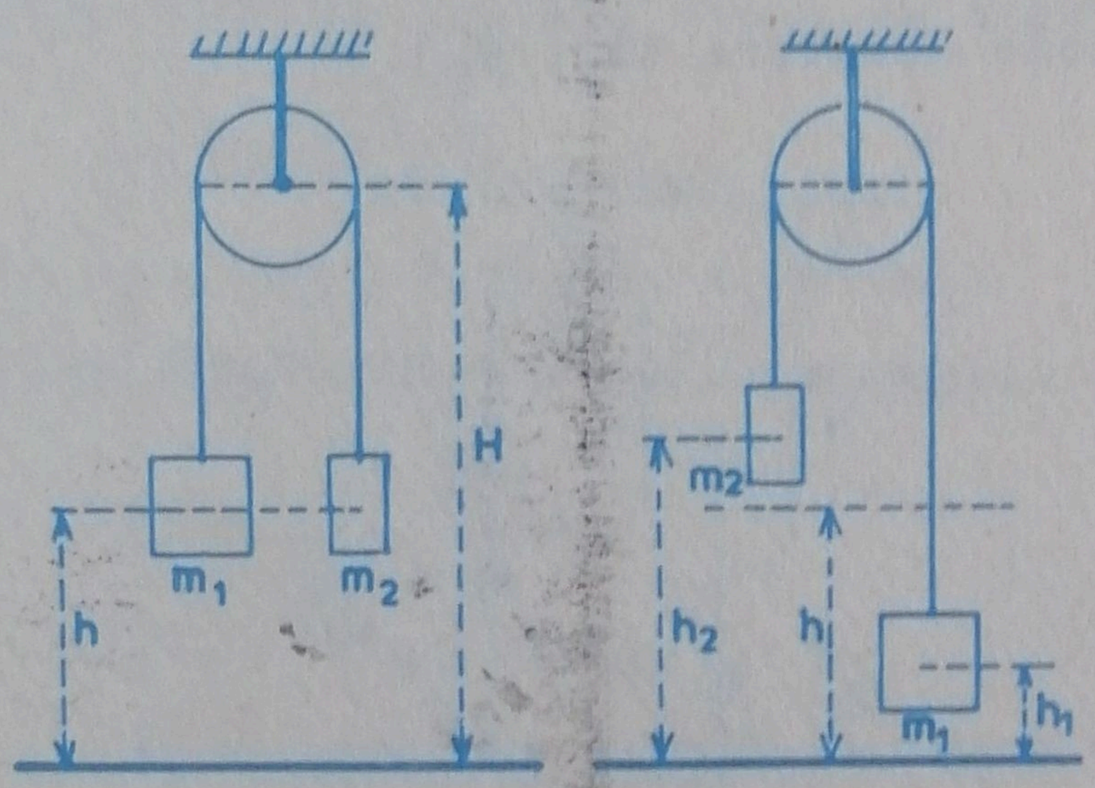


Figura I.1o5

$$E_1 = mgH + m_1gh + m_2gh;$$

$$E_f = mgH + m_1gh_1 + \frac{m_1v^2}{2} + m_2gh_2 + \frac{m_2v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2};$$

$$E_1 = E_f;$$

$$h_1 = h - s;\ h_2 = h + s;\ I = mr^2/2;\ \omega = v/r;$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = mv^2/4;$$

$$m_1gh + m_2gh = m_1gh - m_1gs + \frac{m_1v^2}{2} + m_2gh + m_2gs + \frac{m_2v^2}{2} + \frac{mv^2}{4};$$

$$(m_1 - m_2)gs = \frac{v^2}{2}(m_1 + m_2 + \frac{m}{2});$$

$$v^2 = 2\,\frac{m_1 - m_2}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2}\,g\,s;$$

$$v^2 = 2as;\ a = \frac{m_1 - m_2}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2}\,g.$$

Problema 59

Să se determine acceleraţiile corpurilor cu masele m_1 şi m_2, suspendate de sistemul de scripeţi reprezentat în desenul din figura I.1o6. Să se calculeze acceleraţiile unghiulare ale scripeţilor şi tensiunile din fir. Se cunosc razele scripeţilor (r_1; r_2) şi masele acestora (M_1; M_2).

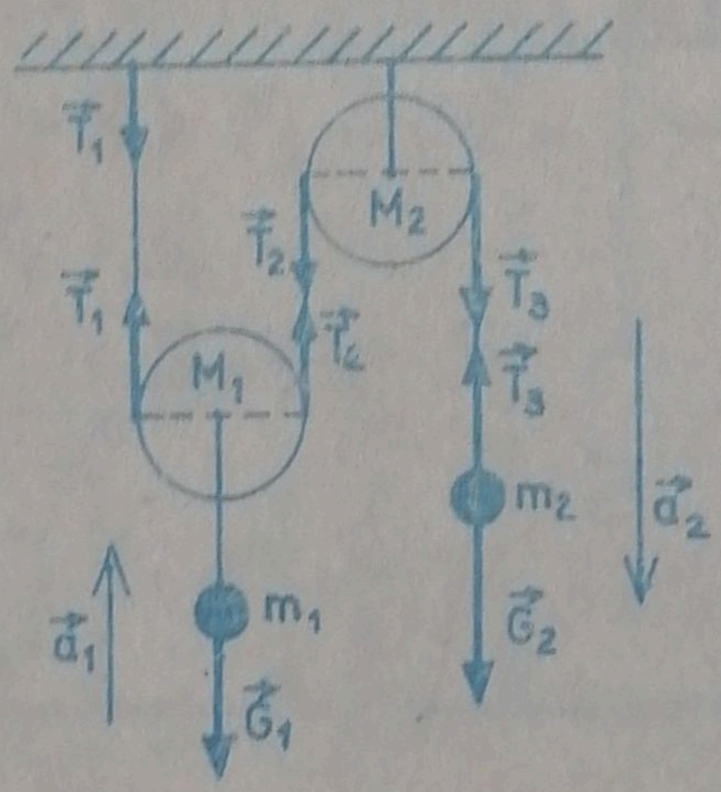


Figura I.1o6

Rezolvare

Forţele care acţionează asupra fiecărui element al sistemului fiind reprezentate în desenul din figura I.1o6, rezultă:

$$\vec{r}_1 \times \vec{T}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{T}_1 = I_1 \vec{\varepsilon}_1;$$

$$r_1 T_2 - r_1 T_1 = I_1 \varepsilon_1;$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{T}_3 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_2 = I_2 \vec{\varepsilon}_2;$$

$$r_2 T_3 - r_2 T_2 = I_2 \varepsilon_2;$$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{i1} + \vec{G}_1 = o;$$

$$T_1 + T_2 - (m_1 + M_1)a_1 - (m_1 + M_1)g = o;$$

$$\vec{G}_2 + \vec{F}_{i2} + \vec{T}_3 = o;$$

$$m_2 g - m_2 a - T_3 = o;$$

$$\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r}_1;\ a_1 = \varepsilon_1 r_1;$$

$$\vec{a}_2 = \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{r}_2;\ a_2 = \varepsilon_2 r_2;$$

$$I_1 = M_1 r_1^2/2;\ I_2 = M_2 r_2^2/2.$$

Distanţa parcursă de corpul cu masa m_1 este:

$$a_1 = a_1 t^2/2,$$

iar distanţa parcursă, în acelaşi timp, de corpul cu masa m_2 este:

$$d_2 = a_2 t^2/2.$$

Deoarece $d_2 = 2d_1$, rezultă: $a_2 = 2a_1$.

Am obţinut următorul sistem de ecuaţii:

$$T_2 - T_1 = \frac{M_1 a_1}{2};$$

$$2T_3 - 2T_2 = M_2 a_2;$$

$$T_1 + T_2 = (m_1 + M_1)a_1 + (m_1 + M_1)g;$$

$$-2T_3 = 2m_2 a_2 - 2m_2 g;$$

$$a_2 = 2a_1.$$

Rezultă:

$$a_1 = \frac{2(2m_2 - m_1 - M_1)}{2m_1 + 8m_2 + 4M_2 + 3M_1} g;$$

$$a_2 = 2a_1; \quad \varepsilon_1 = a_1/r_1; \quad \varepsilon_2 = a_2/r_2;$$

$$T_1 = \frac{6m_1m_2+5m_2M_1+2m_1M_2+2M_1M_2+m_1M_1+M_1^2}{2m_1+8m_2+3M_1+4M_2} g;$$

$$T_2 = \frac{6m_1m_2 + 7m_2M_1 + 2m_1M_2 + 2M_1M_2}{2m_1 + 8m_2 + 3M_1 + 4M_2} g;$$

$$T_3 = \frac{6m_1m_2 + 7m_2M_1 + 6m_2M_2}{2m_1 + 8m_2 + 3M_1 + 4M_2} g.$$

Problema 6o

Un cilindru plin, cu masa m şi raza r are înfăşurat pe el un fir subţire, inextensibil şi imponderabil. Ţinînd de capătul liber al firului se lasă cilindrul să cadă. Să se determine acceleraţia liniară a centrului de greutate al cilindrului, acceleraţia unghiulară a cilindrului şi tensiunea din fir. Se admite că în timpul căderii cilindrul rămîne în poziţie orizontală, iar firul rămîne în poziţie verticală.

Rezolvare

Metoda I

Cînd cilindrul este în repaus faţă de sol, sistemul are numai energie potenţială gravitaţională. După parcurgerea distanţei h sistemul va avea numai energie cinetică corespunzătoare mişcării de translaţie şi energie cinetică corespunzătoare mişcării de rotaţie.

Folosind desenul din figura I.1o7 şi legea conservării energiei mecanice, rezultă:

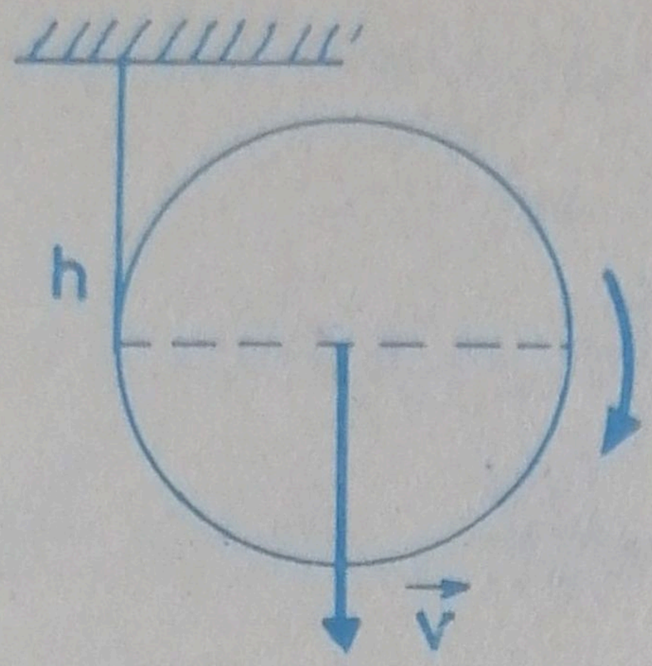


Figura I.1o7

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2};$$

$$I = mr^2/2; \quad \omega = v/r;$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2v^2}{4r^2};$$

$$gh = \frac{3}{4} v^2;$$

$$v^2 = 2\,\frac{2}{3}\,gh; \quad v^2 = 2ah;$$

$$a = \frac{2}{3} g.$$

Metoda II

In desenul din figura I.1o8 sînt prezentate forţele care acţionează asupra sistemului.

Folosind principiul lui d'Alembert, rezultă:

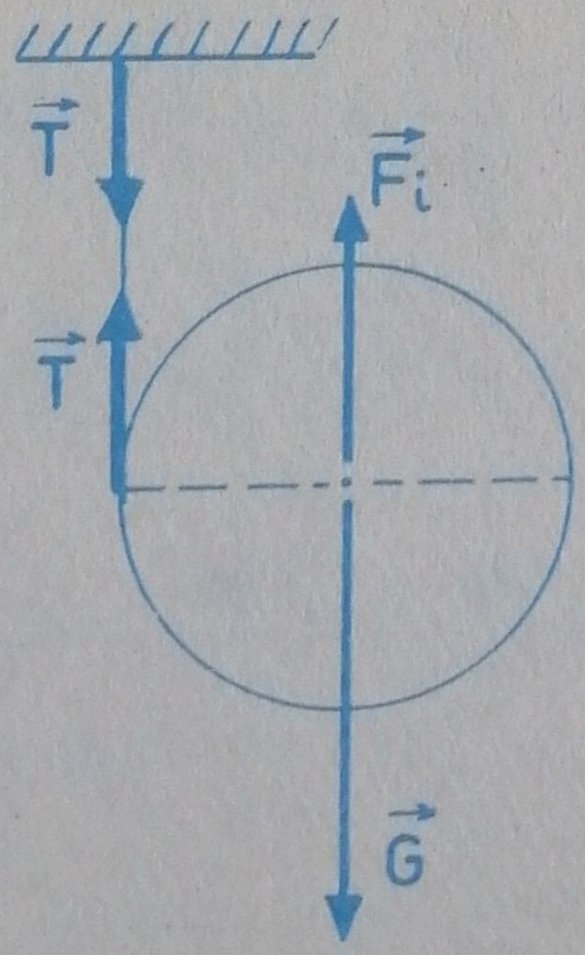


Figura I.1o8

$$\vec{T} + \vec{F}_i + \vec{G} = o;$$

$$T + ma - mg = o;$$

$$(\vec{M}_{\vec{G}} + \vec{M}_{\vec{F}_i} + \vec{M}_{\vec{T}})_A = I\,\vec{\varepsilon};$$

$$mgr - mar = I\varepsilon;$$

$$mgr - mar = \frac{mr^2 a}{2r};$$

$$a = \frac{2}{3}\,g;\quad \varepsilon = 2g/3r;\quad T = mg/3.$$

Problema 61

Două discuri de raze r_1 şi respectiv r_2, cu masele m_1 şi respectiv m_2 sînt montate unul lîngă celălalt, pe acelaşi ax. Pe fiecare disc este înfăşurat cîte un fir, purtînd la capete cîte un corp de masă M_1 şi respectiv M_2. Considerînd că în timpul mişcării sistemului unul dintre corpuri urcă, iar celălalt coboară să se determine acceleraţiile celor două corpuri. Caz particular: $m_1 = m_2 = m$; $r_1 = r_2$.

Rezolvare

In desenul din figura I.1o9 sînt prezentate elementele sistemului atît la momentul iniţial (la acelaşi nivel deasupra solului), cît şi la un moment ulterior.

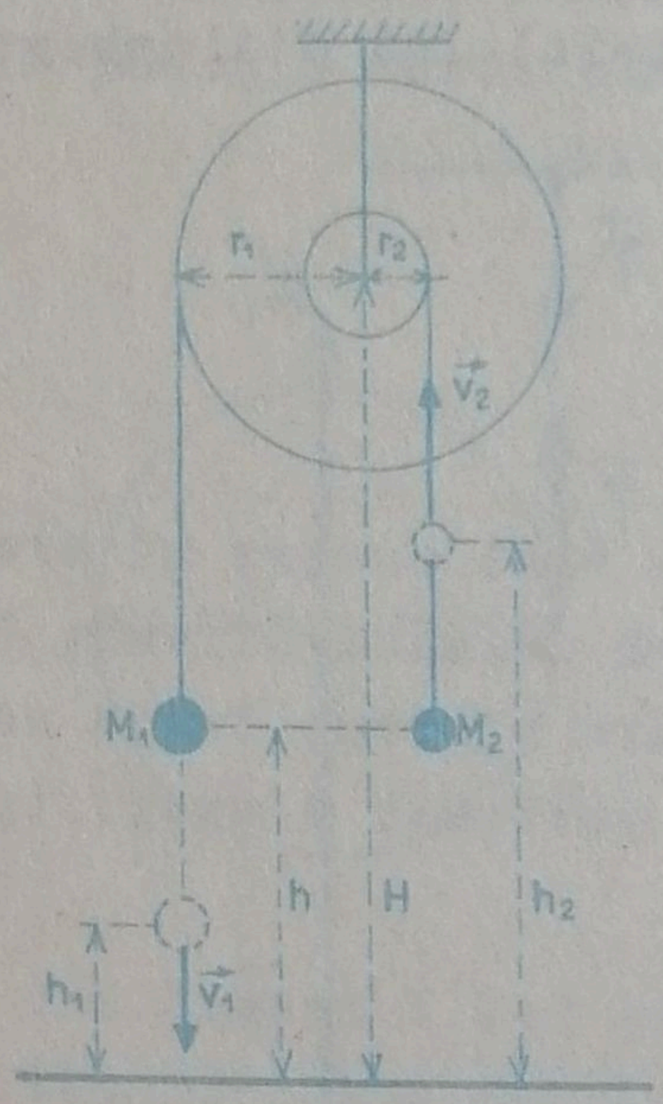


Figura I.1o9

Din legea conservării energiei mecanice rezultă:

$$(m_1 + m_2)gH + M_1gh + M_2gh = (m_1 + m_2)gH +$$

$$+ \frac{I\omega^2}{2} + M_1gh_1 + \frac{M_1v_1^2}{2} + M_2gh_2 + \frac{M_2v_2^2}{2};$$

$$h_1 = h - s_1;\ h_2 = h + s_2;$$

$$M_1gh + M_2gh = \frac{I\omega^2}{2} + M_1g(h - s_1) + \frac{M_1v_1^2}{2} +$$

$$+ M_2g(h + s_2) + \frac{M_2v_2^2}{2};$$

$$M_1gs_1 - M_2gs_2 = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{M_1v_1^2}{2} + \frac{M_2v_2^2}{2};$$

$$I = \frac{m_1r_1^2 + m_2r_2^2}{2};$$

$$s_1 = \frac{a_1t^2}{2} = \varepsilon r_1t^2/2;\ s_2 = \frac{a_2t^2}{2} = \varepsilon r_2t^2/2;$$

$$s_2 = \frac{r_2}{r_1}s_1;\ v_1 = \omega r_1;\ v_2 = \omega r_2;\ v_2 = \frac{r_2}{r_1}v_1;$$

$$M_1gs_1 - M_2g\frac{r_2}{r_1}s_1 = \frac{Iv_1^2}{2r_1^2} + \frac{M_1v_1^2}{2} + \frac{M_2r_2^2v_1^2}{2r_1^2};$$

$$\left\{M_1 - (M_2)\frac{r_2}{r_1}\right\}gs_1 = \frac{v_1^2}{2}\left(M_1 + M_2\frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{I}{r_1^2}\right);$$

$$v_1^2 = 2\,\frac{M_1 - M_2\frac{r_2}{r_1}}{\frac{r_2^2}{r_1^2}M_2 + \frac{I}{r_1^2} + M_1}\,gs_1;$$

$$v_1^2 = 2a_1s_1;$$

$$a_1 = \frac{M_1 - M_2 \frac{r_2}{r_1}}{\frac{r_2^2}{r_1^2} M_2 + \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{2 r_1^2} + M_1} g;$$

$v_1 = a_1 t = \omega r_1$; $v_2 = a_2 t = \omega r_2$;

$a_2 = a_1 r_2 / r_1$;

Caz particular:

$$a_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + m} g = a_2.$$

Problema 62

O sferă cu masa m este suspendată, printr-un fir cu lungimea L, de plafonul unui vagon a cărui masă este M. La momentul iniţial sistemul este în repaus, iar firul de suspensie formează cu verticala unghiul α . Se eliberează sfera. Ce viteză va avea vagonul atunci cînd firul va forma cu verticala unghiul $\beta < \alpha$. Se neglijează frecările.

Rezolvare

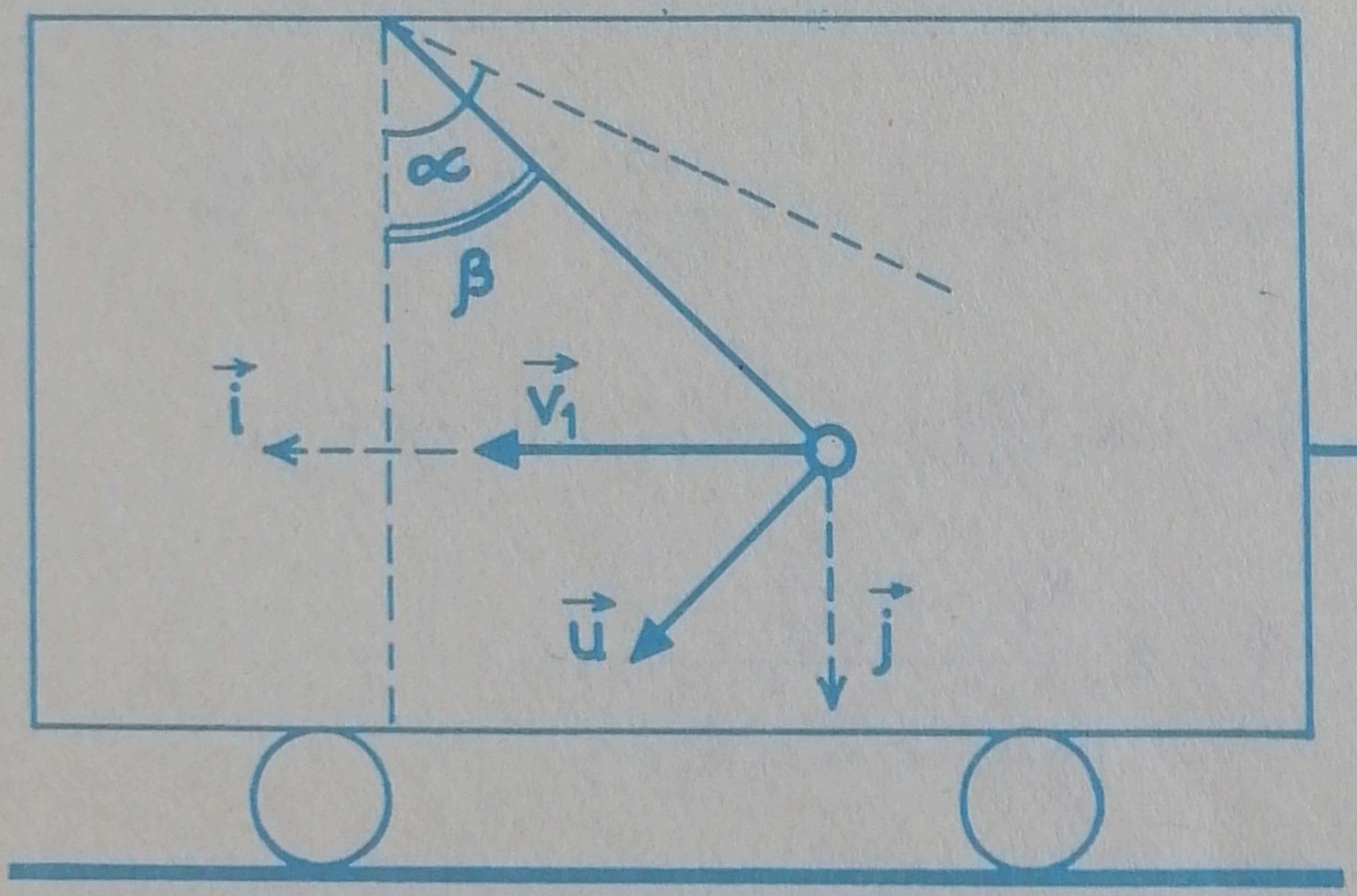


Figura I.11o

In desenul din figura I.11o am notat:

$\vec{u}$ = viteza sferei în raport cu vagonul atunci cînd firul formează cu verticala unghiul β ;

$$\vec{u} = u\cos\beta\ \vec{i} + u\sin\beta\ \vec{j};$$

$$\vec{u} = u_{//}\ \vec{i} + u_{\perp}\ \vec{j};$$

$\vec{v}_1$ = componenta orizontală a vitezei sferei în raport cu solul;

$\vec{v}_2$ = viteza vagonului în raport cu solul;

$$\vec{u}_{//} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2;\ \vec{v}_1 = \vec{u}_{//} + \vec{v}_2;$$

$$v_1 = u_{//} - v_2 = u\cos\beta - v_2.$$

Deoarece sistemul este izolat de exterior numai pe direcţie orizontală, din legea conservării impulsului, rezultă:

$$m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 = 0;$$

$$mv_1 = Mv_2;$$

$$m(u\cos\beta - v_2) = Mv_2;$$

$$u = \frac{(m + M)v_2}{m\cos\beta}. \qquad (1)$$

Din legea conservării energiei mecanice rezultă:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} = mgL(\cos\beta - \cos\alpha);$$

$\vec{v}$ = viteza sferei în raport cu solul;

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_2;$$

$$\vec{v} = \vec{u}_{//} + \vec{u}_{\perp} + \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}_{\perp};$$

$$v^2 = v_1^2 + u_{\perp}^2;$$

$$\frac{m}{2}\left\{(u\cos\beta - v_2)^2 + u^2\sin^2\beta\right\} + \frac{Mv_2^2}{2} =$$

$$= mgL(\cos\beta - \cos\alpha). \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$v = m \cos\beta \sqrt{\frac{2gL(\cos\beta - \cos\alpha)}{(M + m)(M + m \sin^2\beta)}}.$$

Problema 63

Pe un plan cu înclinaţia θ faţă de orizontală se rostogolesc fără să alunece o sferă şi un cilindru, cu raze egale şi mase egale. Să se determine acceleraţiile lor în ipoteza că ambele sînt pline, sau ambele sînt goale.

Rezolvare

In desenul din figura I.111 sînt reprezentate numai forţele al căro moment faţă de punctul de contact cu solul este diferit de zero.

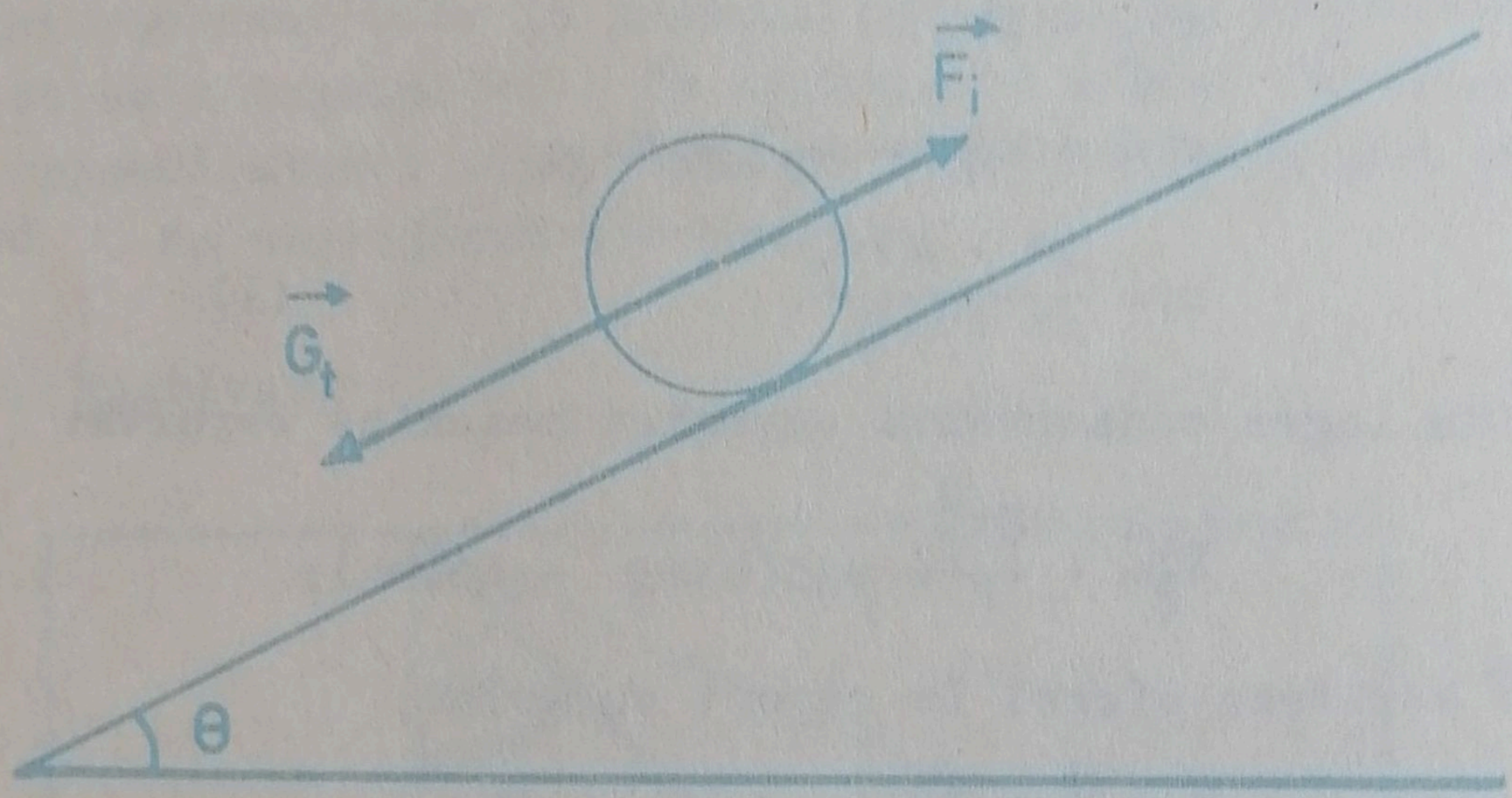


Figura I.111

Rezultă:

$$\vec{M}_{\vec{G}_t} + \vec{M}_{\vec{F}_i} = I\vec{\varepsilon};$$

$$mgr\sin\theta - mar = I\varepsilon;$$

$$\varepsilon = a/r.$$

Cilindru plin

$$I = mr^2/2;$$

$$a = \frac{2}{3} g \sin\theta.$$

Cilindru gol

$$I = m(R^2 + r^2)/2;$$

$$a = \frac{2gR^2 \sin\theta}{3R^2 + r^2}.$$

Sferă plină

$$I = 2mr^2/5;$$

$$a = \frac{5}{7} g \sin\theta.$$

Sferă goală

$$I = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3};$$

$$a = \frac{5g(R^3 - r^3)\sin\theta}{7R^3 - r^3 - \frac{r^5}{R^2}}.$$

Problema 64

Pe un plan cu înclinaţia θ se rostogoleşte fără alunecare un cilindru plin cu masa m şi raza r.

1) Să se determine acceleraţia liniară a centrului de greutate al cilindrului.

2) Cu ce acceleraţie trebuie deplasat planul înclinat pentru ca cilindrul să rămînă în echilibru?

3) Cu ce acceleraţie trebuie deplasat planul înclinat pentru ca cilindrul să urce pe plan cu acceleraţia cu care coborîse liber prin rostogoloire?

Rezolvare

1) Forţele care acţionează asupra cilindrului sînt reprezentate în desenul din figura I.112.

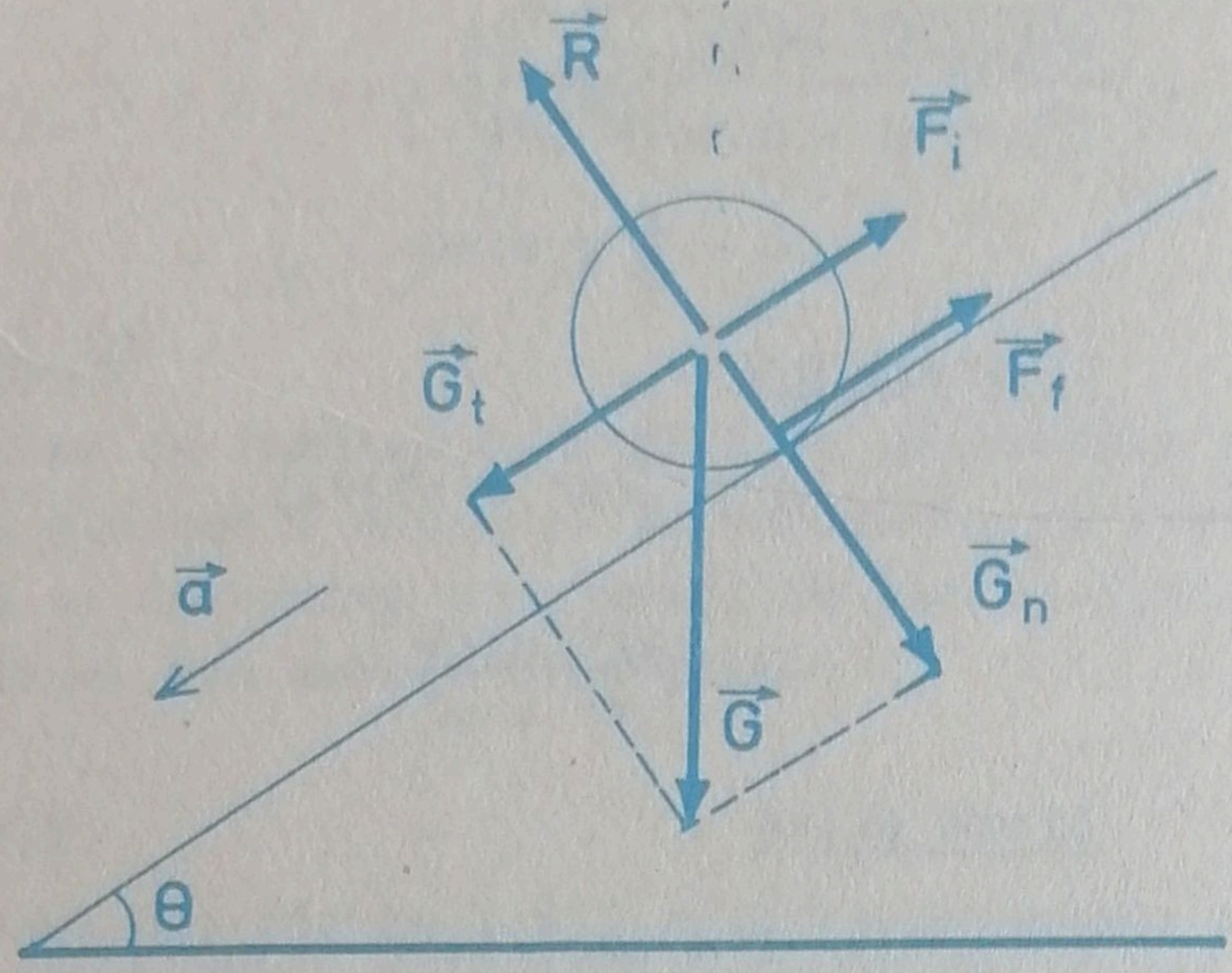


Figura I.112

$$\vec{M}_{\vec{G}_t} + \vec{M}_{\vec{F}_i} + \vec{M}_{\vec{F}_f} = I\vec{\varepsilon} \ ;$$

$$G_t r - F_i r = I\varepsilon \ ;$$

$$mgr\sin\theta - mar = mr^2 a/2r;$$

$$a = \frac{2}{3} g \sin\theta.$$

2) Condiţia de echilibru a cilindrului rezultă din analiza desenului prezentat în figura I.113.

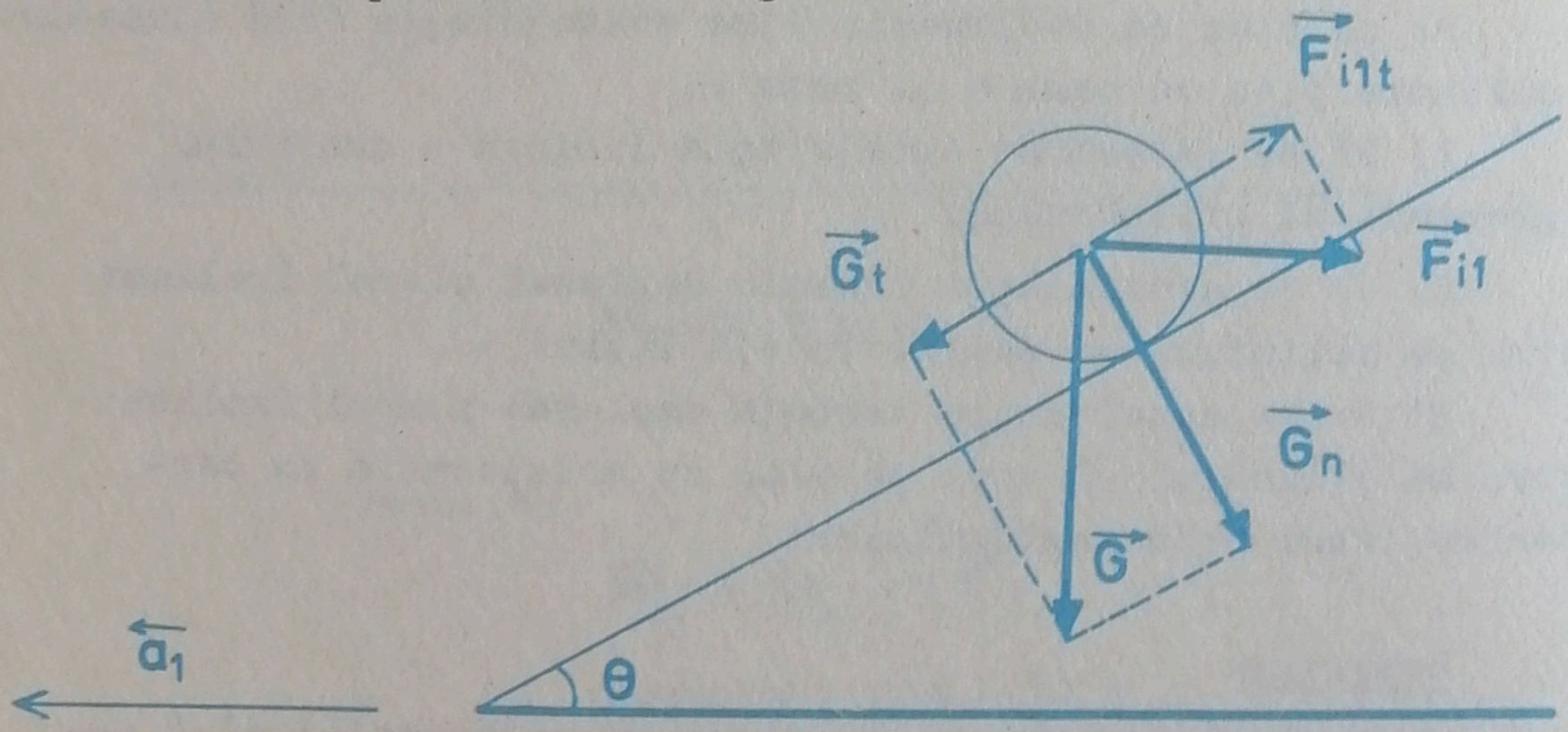


Figura I.113

$$\vec{M}_{\vec{G}_t} + \vec{M}_{\vec{F}_{ilt}} = o;$$

$$G_t r = F_{ilt} r;$$

$$mgr\sin\theta = ma_1 r\cos\theta;$$

$$a_1 = g\ tg\theta.$$

3) Forţele care acţionează asupra cilindrului sînt reprezentate în desenul din figura I.114.

Principiul fundamental al dinamicii aplicat mişcării de rotaţie a cilindrului conduce la:

$$\vec{M}_{\vec{G}_t} + \vec{M}_{\vec{F}_i} + \vec{M}_{\vec{F}_{i2t}} = I\vec{\varepsilon};$$

$$mgr\sin\theta + F_i r - F_{i2t} r = I\varepsilon;$$

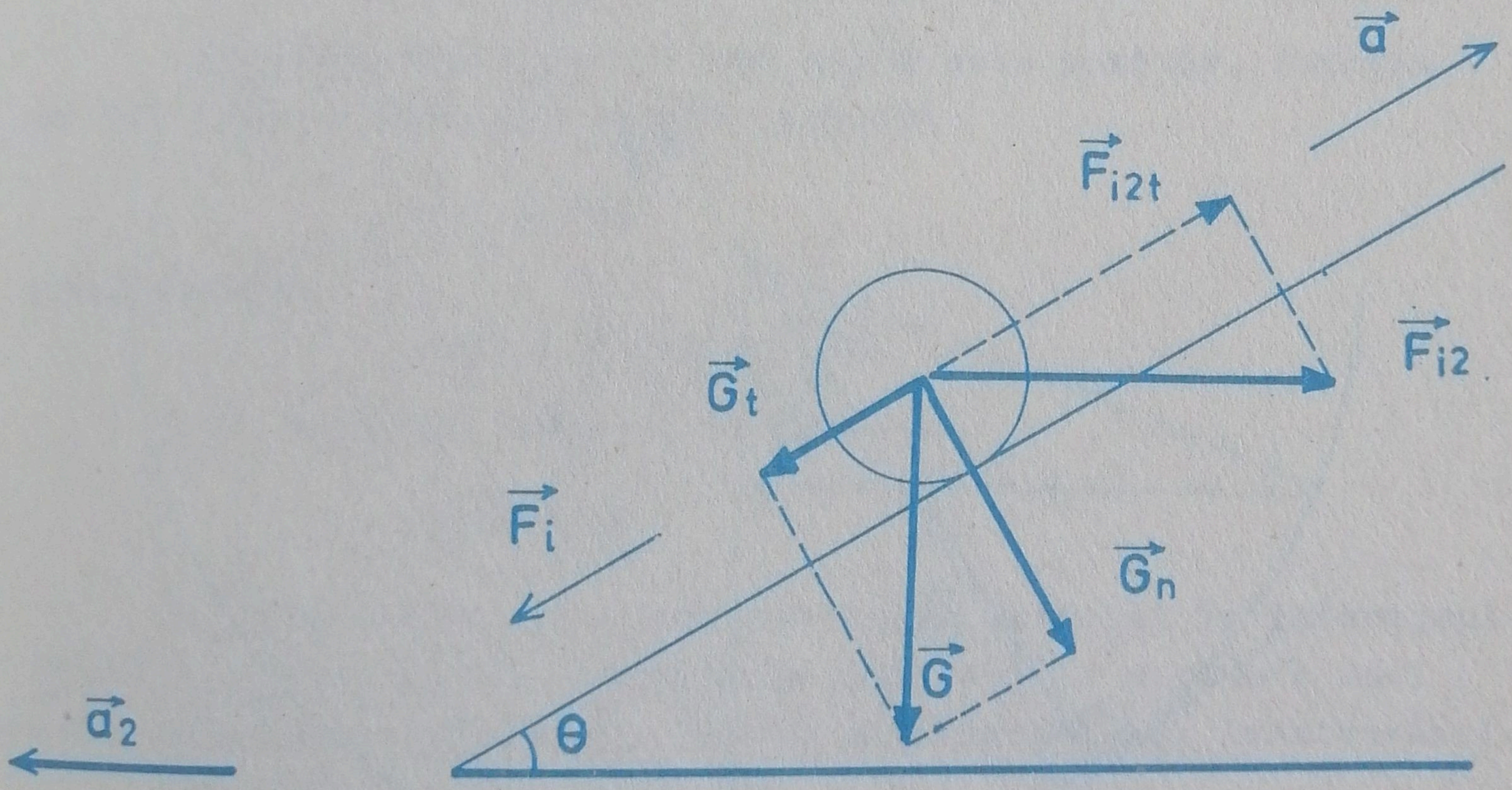


Figura I.114

$$mgr\sin\theta + mar - ma_2 r\cos\theta = mr^2 a/2r;$$

$$g\sin\theta + \frac{a}{2} = a_2\cos\theta;$$

$$a = \frac{2}{3} g\sin\theta;$$

$$a_2 = \frac{4}{3} g \, tg\theta .$$

Problema 65

Un punct material alunecă fără frecare în interiorul unei cavităţi semisferice cu raza R.

1) Din ce punct al cavităţii trebuie eliberat punctul material, pentru ca acceleraţia acestuia să devină minimă înainte ca acesta să ajungă la baza cavităţii?

2) Să se calculeze perioada oscilaţiilor mici ale punctului material în interiorul cavităţii.

Rezolvare

1) In desenul din figura I.115 sînt reprezentate forţele care acţionează asupra corpului la un moment oarecare.

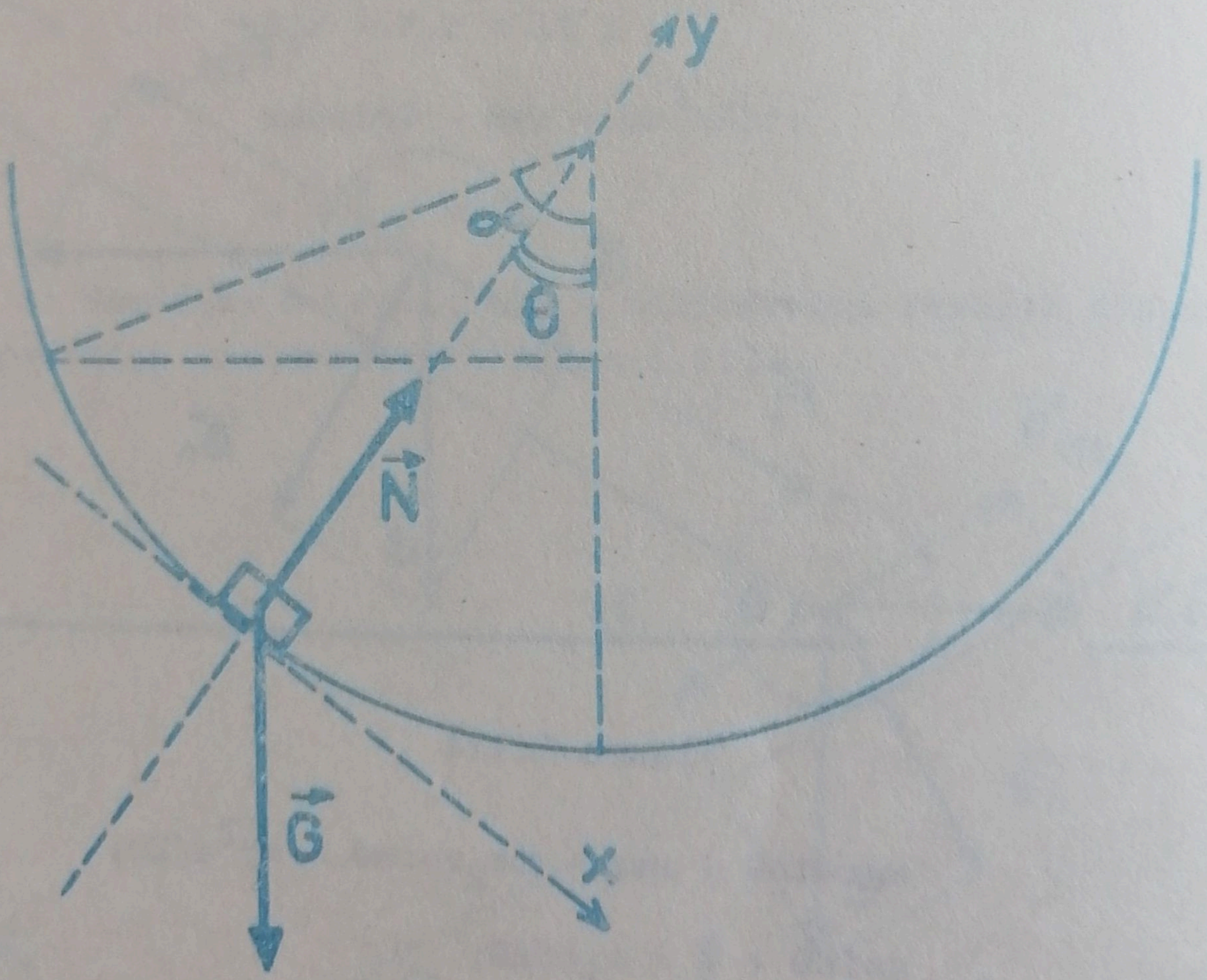


Figura I.115

Poziţia iniţială a punctului material este determinată de unghiul α , iar poziţia la un anumit moment este determinată de unghiul θ.

Rezultă:

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{G};$$

$$ma_x = G\sin\theta;\ a_x = a_t = g\sin\theta;$$

$$ma_y = N - G\cos\theta;\ a_y = a_n = v^2/R;$$

$$v^2 = 2gR(\cos\theta - \cos\alpha);$$

$$a_n = 2g(\cos\theta - \cos\alpha);$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t;$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2};$$

$$a = g\sqrt{3\cos^2\theta - 8\cos\alpha\cos\theta + (1 + 4\cos^2\alpha)}.$$

Deoarece coeficientul lui $\cos^2\theta$ este pozitiv, funcţia de sub radical admite un minim, pentru:

$$x = -b/a2,$$

adică pentru:

$$\cos\theta = \frac{4}{3}\cos\alpha .$$

Din condiţia $\cos\theta < 1$, rezultă:

$$\cos\alpha < \frac{3}{4}.$$

2) Oscilaţiile mici ale punctului material în interiorul cavităţii sferice sînt identice cu oscilaţiile mici ale unui punct material suspendat de un fir imponderabil şi inextensibil.

Rezultă:

$$T = 2\widetilde{\pi}\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Problema 66

Se dau: o riglă gradată, un cronometru, un raportor, un plan înclinat, un cilindru metalic avînd bazele acoperite cu discuri foarte uşoare şi o sferă metalică. Cu dispozitivele

aflate la dispoziţie se poate stabili că sfera sau cilindrul sînt pline sau sînt goale? Dacă acestea sînt goale se poate determina raza interioară a cavităţilor? In cazul cilindrului cavitatea interioară se va considera un cilindru coaxial cu cilindrul dat, iar în cazul sferei, cavitatea se va considera o sferă concentrică cu sfera dată.

Rezolvare

1) Cazul cilindrului

Determinarea experimentală a acceleraţiei cilindrului

Se lasă cilindrul să se rostogolească pe planul înclinat. Cu ajutorul dispozitivelor aflate la dispoziţie se calculează:

s = distanţa parcursă de cilindru pe planul înclinat;

t = durata mişcării.

Rezultă:

$$a_{exp} = 2s/t^2.$$

Se fac mai multe determinări, acceptîndu-se pentru acceleraţia cilindrului valoarea medie a tuturor valorilor determinate pentru a_{exp}.

Determinarea teoretică a aceeleraţiei cilindrului

Dacă cilindrul este masiv, atunci acceleraţia sa trebuie să fie:

$$a_1 = \frac{2}{3} g\sin\theta,$$

iar dacă cilindrul are o cavitate cilindrică, coaxială, atunci acceleraţia sa este:

$$a_2 = \frac{2gR^2\sin\theta}{3R^2 + r^2}.$$

In cazul în care $a_{exp} = a_1$, unde θ se poate măsura cu raportorul, cilindrul este masiv. In caz contrar rezultă că cilindrul este gol. Impunînd condiţia:

$$a_{exp} = a_2,$$

rezultă:

$$\frac{2s}{t^2} = \frac{2gR^2\sin\theta}{3R^2 + r^2};$$

$$r = \sqrt{\frac{gt^2R^2\sin\theta}{s} - 3R^2}$$

2) Cazul sferei

Se calculează în mod asemănător:

$$a_{exp} = 2s/t^2;$$

$$a_1 = \frac{5}{7} g\sin\theta;$$

$$a_2 = \frac{5g(R^3 - r^3)\sin\theta}{7R^3 - r^3 - \frac{r^5}{R^2}}.$$

Dacă $a_{exp} = a_1$, atunci sfera este masivă. Dacă $a_{exp} = a_2$, atunci sfera are o cavitate, a cărei rază se poate determina.

Problema 67

Un cilindru cu raza R este fixat în poziţie orizontală. De pe generatoarea superioară a acestuia se lasă liber simultan un cilindru şi o sferă cu raza $r < R$, avînd masele egale. Considerînd că acestea se rostogolesc fără să alunece să se precizeze unde vor părăsi suprafaţa cilindrului.

Rezolvare

Desprinderea de pe suprafaţa cilindrului fix va avea loc în momentul în care reacţia sa normală este nulă şi deci rezultanta forţelor care acţionează asupra corpului care se desprinde este perpendiculară pe raza cilindrului fix. Situaţia aceasta este prezentată în desenul din figura I.116.

Notaţii: $OB = R$; $BO_1 = r$; $AB = h$.

Luînd ca nivel de referinţă orizontala AO_1', legea conservării energiei mecanice a sistemului conduce la relaţia:

$$mh(h + r) = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

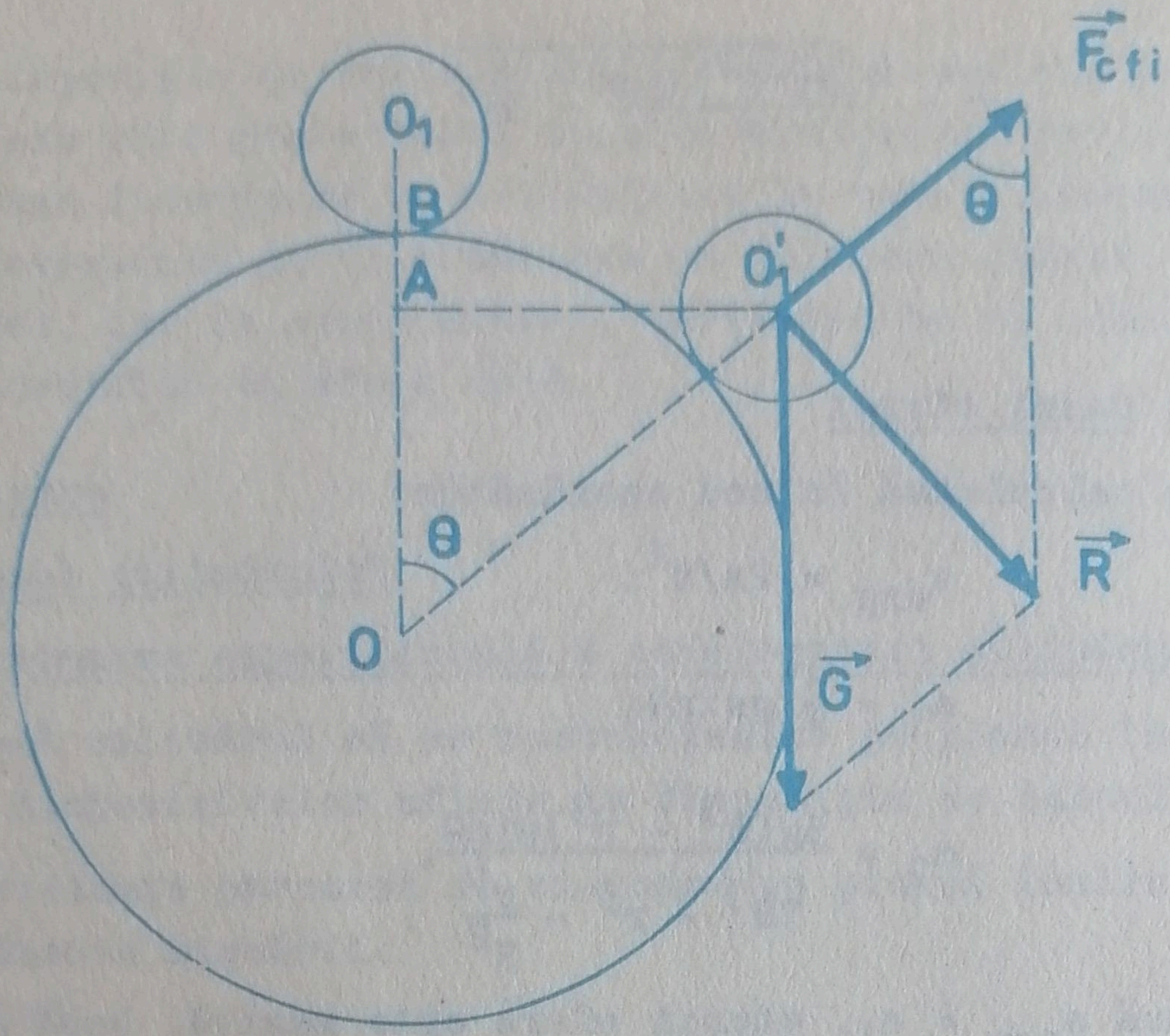


Figura I.116

Pentru cilindru:

$$mg(h_1 + r) = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{I_1 v_1^2}{2(R + r)(R + r)};\ I_1 = mr^2/2.$$

Rezultă:

$$v_1^2 = \frac{4(h_1 + r)(R + r)^2 g}{2(R + r)^2 + r^2}.$$

Pentru sferă:

$$mg(h_2 + r) = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{I_2 v_2^2}{2(R + r)^2};\ I_2 = 2mr^2/5.$$

Rezultă:

$$v_2^2 = \frac{1o(h_2 + r)(R + r)^2 g}{5(R + r)^2 + 2r^2}.$$

Din desenul prezentat în figura I.116 rezultă:

$$\cos\theta = \frac{F_{cfi}}{G} = \frac{v^2}{(R + r)g};$$

$$\cos\theta = OA/OA_1' = \frac{R - h}{R + h};$$

$$\frac{R - h}{R + h} = \frac{v^2}{(R + r)g};$$

$$R - h = v^2/g.$$

Pentru cilindru:

$$R - h_1 = v_1^2/g;$$

$$R - h_1 = \frac{4(h_1 + r)(R + r)^2}{2(R + r)^2 + r^2};$$

$$h_1 = \frac{2(R + r)^2(R - 2r) + Rr^2}{6(R + r)^2 + r^2}.$$

Caz particular: r = o.
rezultă:

$$h_1 = R/3; \quad \cos\theta = 2/3.$$

Pentru sferă:

$$R - h_2 = v_2^2/g;$$

$$\frac{1o(h_2 + r)(R + r)^2}{5(R + r)^2 + 2r^2} = R - h_2;$$

$$h_2 = \frac{5(R + r)^2(R - 2r) + 2Rr^2}{15(R + r)^2 + 2r^2}.$$

Caz particular: r = o.
Rezultă:

$$h_2 = R/3; \quad \cos\theta = 2/3.$$

Problema 68

Un cilindru se află pe un plan înclinat cu lungimea L şi înclinarea θ faţă de orizontală (cilindrul nu alunecă pe plan ci se rostogoleşte). Frecările şi rezistenţa aerului se neglijează. Axul cilindrului este tras în sus de un fir inextensibil paralel cu planul, fir care trece peste un scripete şi susţine un corp de masă m, aflat la înălţimea h faţă de sol. Scripetele are axul paralel cu axul cilindrului. Scripetele şi cilindrul sînt omogene, de aceeaşi masă M şi aceeaşi rază R. Lăsîndu-se

liber sistemul se cer:

1) acceleraţiile corpului, cilindrului şi scripetelui, în timpul mişcării;

2) vitezele corpului, cilindrului şi scripetelui în momentul cînd corpul atinge solul;

3) tensiunea din fir între scripete şi corp şi între scripete şi cilindru în timpul mişcării.

4) Cînd corpul atinge solul firul se rupe; ce distanţă va parcurge cilindrul pînă la oprire?

5) După ruperea firului scripetele continuă să se rotească. Ce forţă trebuie să acţioneze tangenţial la janta (muchia) scripetelui ca să-l oprească după n = 3 rotaţii?

Se dau: $g = 10\ m/s^2$; $L = 6\ m$; $h = 1,2\ m$; $R = 60\ cm$; $m = 12\ kg$; $M = 6\ kg$; $\theta = 30^o$.

(Concursul de fizică, Etapa judeţeană, 1970)

Rezolvare

1)

Metoda I

In condiţiile impuse de problemă cilindrul trebuie să urce pe planul înclinat. Forţele care realizează aceasta sînt reprezentate în desenul din figura I.117.

Folosind principiul fundamental al dinamicii aplicat mişcării de rotaţie şi principiul lui d'Alembert, rezultă:

$$\vec{R} \times \vec{T}_2 + \vec{R} \times \vec{G}_t + \vec{R} \times \vec{F}_i = I\vec{\varepsilon};$$

$$\vec{R} \times \vec{T}_1 + \vec{R} \times \vec{T}_2 = I\vec{\varepsilon};$$

$$\vec{T}_1 + \vec{F}_{il} + \vec{G} = 0;$$

$$\vec{T}_2 + \vec{G}_t + \vec{F}_i = 0;$$

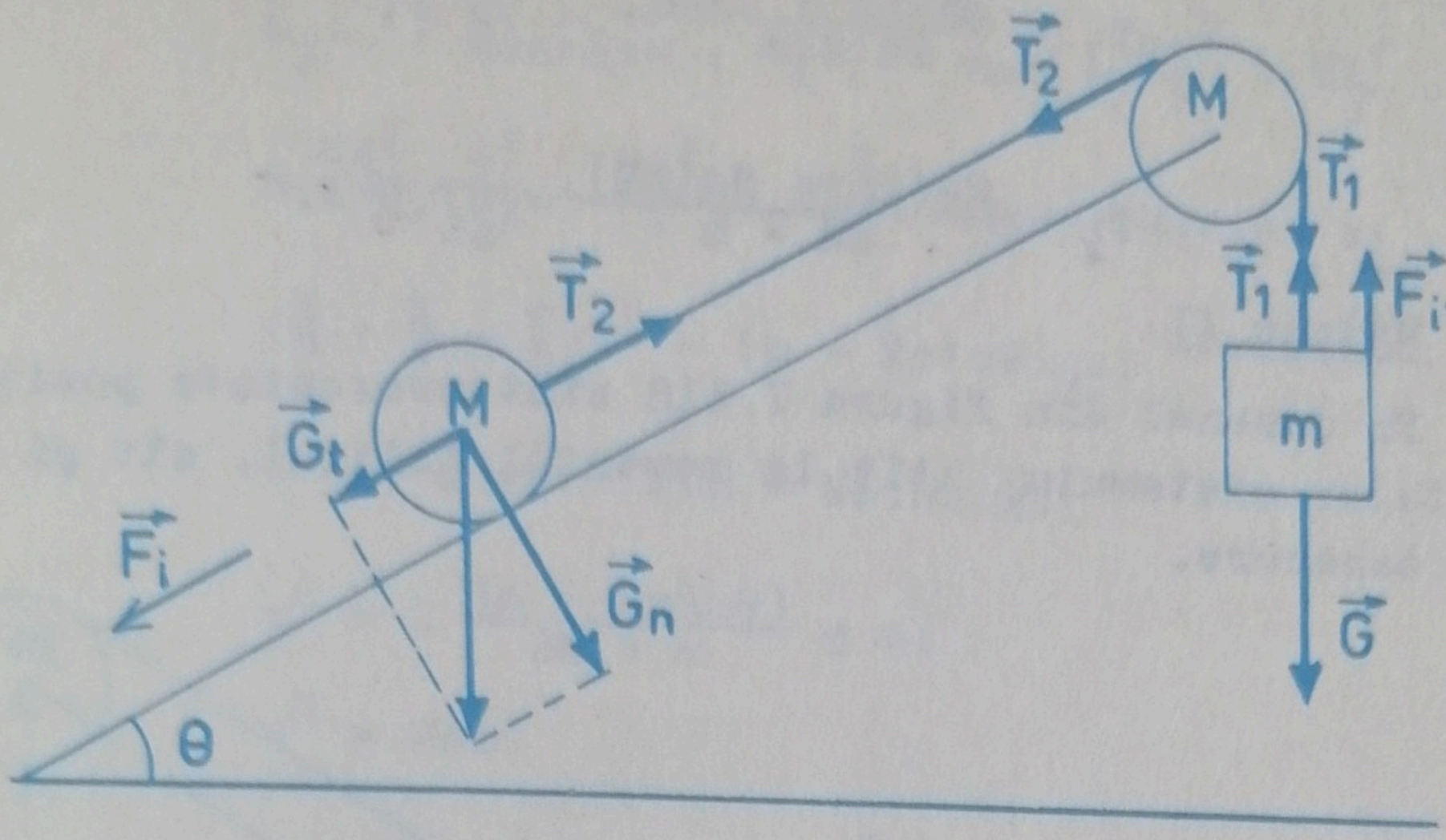


Figura I.117

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{R};$$

$$RT_2 - RG_t - RF_i = I\varepsilon ;$$

$$RT_1 - RT_2 = I\varepsilon ;$$

$$-T_1 - F_{i1} + G = 0;$$

$$T_2 - G_t - F_i = 0;$$

$$a = \varepsilon R;$$

$$I = MR^2/2;$$

$$T_2 = Mg\sin\theta + Ma + \frac{Ma}{2};$$

$$T_1 - T_2 = Ma/2;$$

$$-T_1 = ma - mg;$$

$$T_2 = Ma + Mg\sin\theta;$$

$$a = \frac{(m - M\sin\theta)g}{2M + m} = 3,75 \text{ m/s}^2.$$

Acceleraţia liniară a centrului cilindrului este aceeaşi cu acceleraţia tangenţială a scripetelui şi aceeaşi cu acceleraţia de coborîre a corpului suspendat de capătul firului.

$$T_1 = \frac{mMg(2 + \sin\theta)}{2M + m} = 75 \text{ N};$$

$$T_2 = \frac{Mg(2m + M\sin\theta)}{2M + m} = 67,5 \text{ N}.$$

Metoda II

In desenul din figura I.118 sînt prezentate poziţiile elementelor sistemului atît la momentul iniţial, cît şi la un moment oarecare.

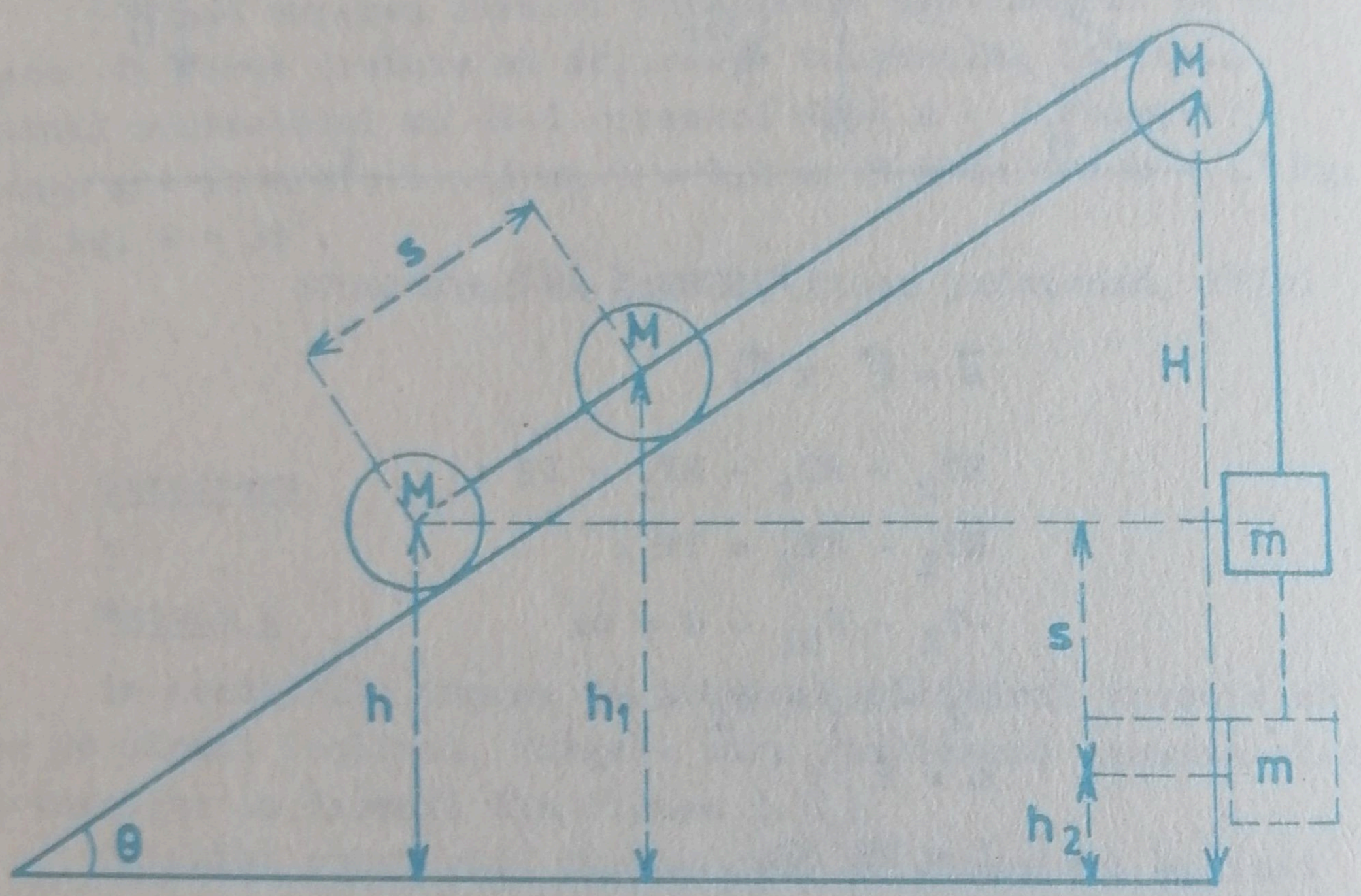


Figura I.118

Energia mecanică iniţială a sistemului este:

$$E_i = MgH + Mgh + mgh.$$

Energia mecanică a sistemului la un anumit moment este:

$$E_f = MgH + \frac{I\omega^2}{2} + Mgh_1 + \frac{I\omega^2}{2} + mgh_2 + \frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$h_2 = h - s; \; h_1 = h + s\sin\theta;$$

$$E_i = E_f;$$

$$\frac{I}{2}^2 + Mgs\sin\theta + \frac{I\omega^2}{2} - mgs + \frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = 0;$$

$$2\,\frac{MR^2}{2}\,\frac{v^2}{2R^2} + \frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mgs - Mgs\sin\theta\ s;$$

$$(\frac{M}{2} + \frac{M}{2} + \frac{m}{2})v^2 = (m - M\sin\theta)gs;$$

$$(2M + m)v^2 = 2(m - M\sin\theta)gs;$$

$$v^2 = 2\,\frac{(m - M\sin\theta)}{2M + m}\,g\,s;$$

$$v^2 = 2as;$$

$$a = \frac{m - M\sin\theta}{2M + m}\,g; \qquad \varepsilon = a/r = 6,25\ s^{-2}.$$

2) Presupunînd că iniţial corpul suspendat se află la nivelul punctului superior al planului înclinat, rezultă că pînă în momentul atingerii solului el a parcurs drumul: $h = L\sin\theta$.

$$v^2 = 2ah = 2aL\sin\theta;$$

$$v = \sqrt{\frac{2(m - M\sin\theta)gL\sin\theta}{2M + m}} = 3\ m/s.$$

Viteza calculată mai sus reprezintă şi viteza centrului cilindrului şi viteza tangenţială a unui punct de la periferia scripetelui.

Viteza unghiulară a scripetelui este:

$$\omega = v/R = 5\ s^{-1}.$$

3) $T_1 = 75\ N;\ T_2 = 67,5\ N.$

4)

Metoda I

In momentul ruperii firului energia totală a sistemului cilindru - Pămînt este:

$$E_1 = MgL\sin^2\theta + \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

După ruperea firului cilindrul se va mai ridica pe planul înclinat pînă cînd toată energia cinetică se va transforma în energie potenţială gravitaţională:

$$E_2 = Mg(L\sin^2\theta + \Delta h);$$

$$E_1 = E_2;$$

$$MgL\sin^2\theta + Mg \quad h = MgL\sin^2\theta + \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2};$$

$$\Delta h = \frac{\frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}}{Mg} = \frac{\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{4}}{Mg} = 3v^2/2g.$$

Distanţa parcursă de cilindru pe planul înclinat pînă la oprire, este:

$$s = \frac{\Delta h}{\sin\theta};$$

$$s = \frac{3v^2}{4g\sin\theta} = 1,35 \text{ m}.$$

Metoda II

Din momentul ruperii firului mişcarea cilindrului este uniform încetinită, pînă la oprire, cu acceleraţia:

$$a = -\frac{2}{3} g\sin\theta.$$

Rezultă:

$$s = s_{max} = -v^2/2a;$$

$$s = \frac{3v^2}{4g\sin\theta}.$$

5)

Metoda I

Exercitarea unei forţe de apăsare normală pe muchia scripetelui determină apariţia unei forţe de frecare, care va determina oprirea scripetelui. Cele două forţe care acţionează asupra discului scripetelui sînt reprezentate în desenul din figura I.119.

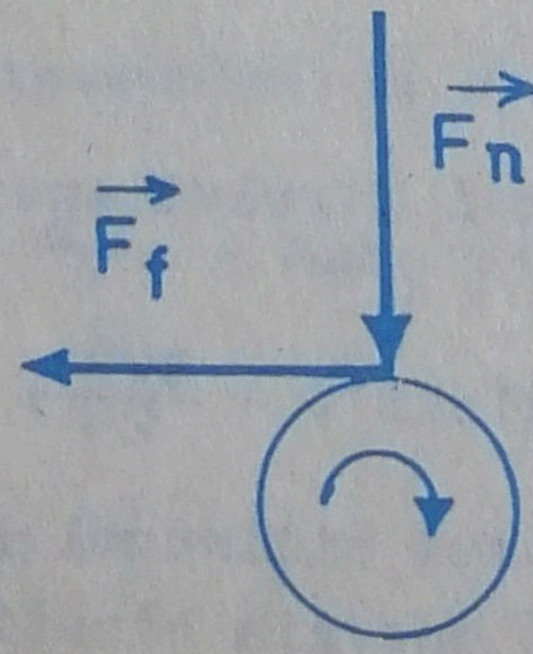


Figura I.119

Ecuaţia unghiului la centru şi ecuaţia vitezei unghiulare pentru un punct de la periferia discului sînt:

$$\theta = \omega_o t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\omega = \omega_o + \varepsilon t.$$

Mişcarea fiind încetinită $\varepsilon < o$.

Din condiţia de oprire a discului ($\omega = o$), rezultă:

$$t_o = - \omega_o / \varepsilon;$$

$$\theta_{max} = (\theta)_{t=t_o};$$

$$\theta_{max} = - \omega_o^2 / 2\varepsilon;$$

$$\theta_{max} = 2\pi n;$$

$$2\pi n = - \omega_o^2 / 2\varepsilon;$$

$$\omega_o = v/R;$$

$$\varepsilon = - \frac{v^2}{4\pi nR^2}.$$

Dacă discul se rotea în sensul de mişcare al acelor ceasornicului, atunci forţa de frecare îi va imprima o acceleraţie de frînare de sens contrar. Orientarea vectorilor care caracterizează mişcarea de rotaţie a discului sînt reprezentaţi în desenul din figura I,12o.

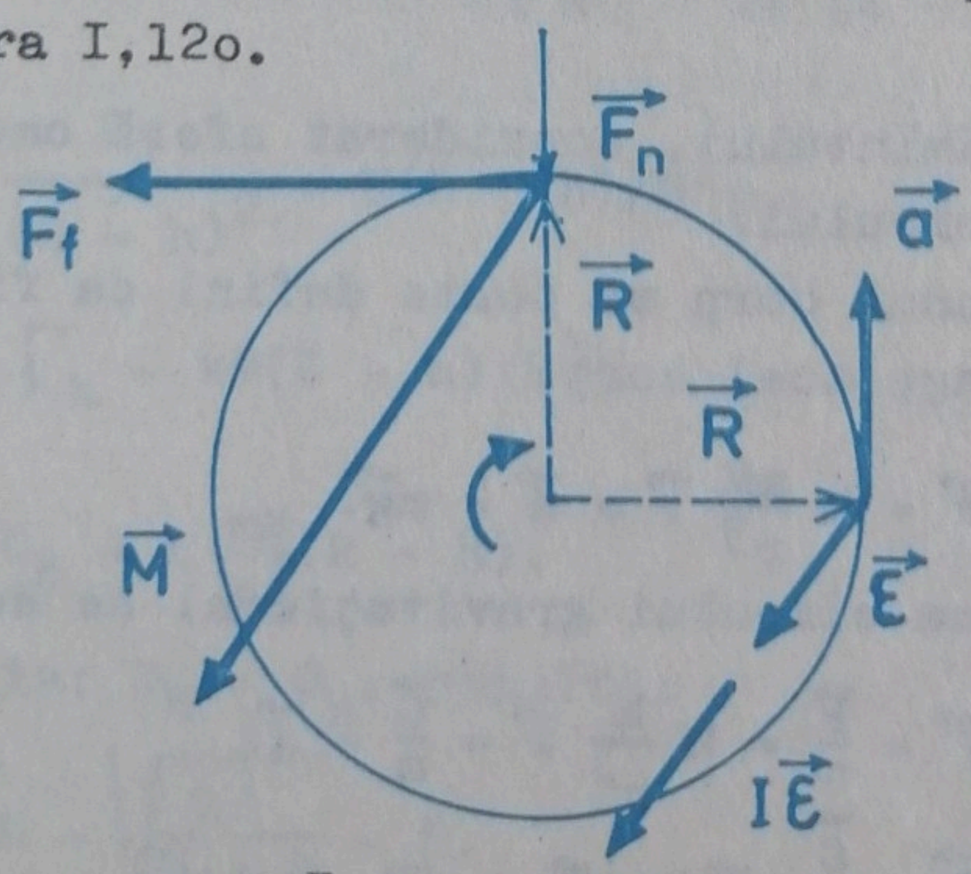


Figura I.12o

Principiul fundamental al dinamicii aplicat mişcării de rotaţie a discului conduce la :

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}\ ;\ \vec{R} \times \vec{F}_f = I\vec{\varepsilon}\ ;$$

$$RF_f = -I\varepsilon\ ;$$

$$F_f = \frac{Mv^2}{8\pi nR} = 1{,}25\ \text{N}.$$

Metoda II

Dacă acţionăm cu o forţă de frecare, tangent la periferia discului, putem afirma că lucrul mecanic al acesteia, efectuat pînă în momentul opririi discului trebuie să fie egal cu energia cinetică a mişcării de rotaţie a discului de la momentul iniţial.

$$F_f 2\pi Rn = \frac{I\omega^2}{2};$$

$$I = MR^2/2;\quad \omega = v/R;$$

$$F_f = \frac{Mv^2}{8\pi nR}.$$

Problema 69

La ce înălţime deasupra Pămîntului greutatea unui corp este aceeaşi cu greutatea aceluiaşi corp la adîncimea h în interiorul Pămîntului?

Rezolvare

M = masa Pămîntului, considerat sferă omogenă;

m = masa corpului.

Greutatea unui corp se poate defini ca fiind forţa cu care Pămîntul atrage acel corp:

$$\vec{F} = k\frac{mM}{r^3}\vec{r} = \vec{G} = m\vec{g}.$$

Intensitatea cîmpului gravitaţional se defineşte astfel:

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = k\frac{M}{r^3}\vec{r} = \frac{\vec{G}}{m} = \vec{g};$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{g}\ ;\ \vec{G} = m\vec{\Gamma}\ ;\ \Gamma = kM/r^2 = g.$$

G_H = greutatea corpului la înălţimea H;

G_h = greutatea corpului la adîncimea h.

$$G_H = m\Gamma_H;$$

$\Gamma_H = kM/(R+H)$; R = raza Pămîntului;

$$G_H = k\frac{mM}{(R+H)^2}; \qquad (1)$$

$$G_h = m\Gamma_h.$$

Pentru calculul lui Γ_h trebuie să ne folosim de faptul că o pătură sferică nu produce cîmp gravitaţional în interiorul ei (efect demonstrat în problema 45).

Să notăm cu M_1 masa sferei de rază R-h. In interiorul Pămîntului, la adîncimea h, cîmpul gravitaţional este creat numai de masa M_1. Pătura sferică de grosime h, de deasupra corpului nu are nici o contribuţie la valoarea intensităţii cîmpului gravitaţional, corespunzător adîncimii h.

$$\Gamma_h = k\frac{M_1}{(R-h)^2}.$$

Dacă presupunem că Pămîntul este o sferă omogenă, atunci densitatea sa se poate calcula astfel:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi RRR} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3M_1}{4\pi(R-h)^3}.$$

Rezultă:

$$\frac{M_1}{(R-h)^2} = M(R-h)/R^3;$$

$$\Gamma_h = kM(R-h)/R^3;$$

$$G_h = k\frac{mM}{R^3}(R-h). \qquad (2)$$

Din condiţia: $G_H = G_h$, rezultă:

$$H = \sqrt{\frac{R^3}{R-h}} - R.$$

Problema 7o

Să se compare perioada pendulului elastic prezentat în desenul din figura I.121 cu perioada pendulului elastic prezentat în desenul din figura I.122.

Rezolvare

1) Perioada pendulului elastic reprezentat în desenul din figura I.121 este:

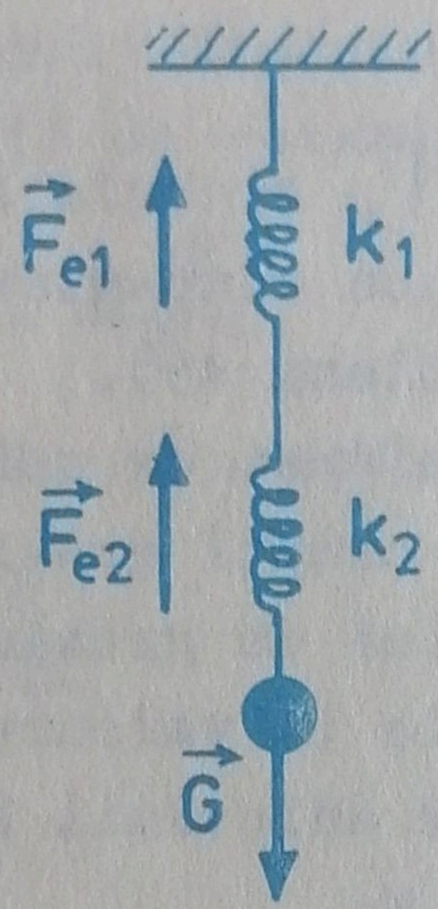


Figura I.121

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

k = constanta de elasticitate echivalentă.

Să observăm că în fiecare resort apare cîte o forţă elastică datorită greutăţii corpului suspendat:

$$F_{e1} = k_1 y_1 = mg;$$

$$F_{e2} = k_2 y_2 = mg.$$

Sistemul celor două resorturi s-a alungit cu cantitatea:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2}.$$

A găsi constanta de elasticitate echivalentă înseamnă a găsi un alt resort, care sub acţiunea greutăţii aceluiaşi corp să se alungească cu cantitatea:

$$y = y_1 + y_2.$$

Rezultă:

$$F_e = ky = mg;\ y = mg/k;$$

$$\frac{mg}{k} = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2};$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2};$$

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2};$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

2) Perioada pendulului elastic reprezentat în desenul din figura I.122 este:

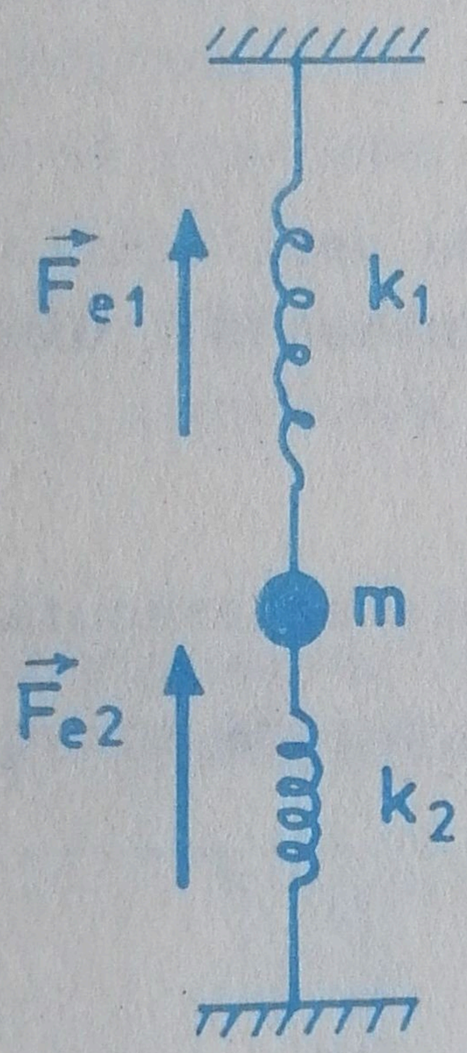


Figura I.122

$$T'' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Considerînd, ca şi în cazul precedent, că desenul reprezintă o stare de echilibru, putem afirma că greutatea corpului este echilibrată de cele două forţe elastice din resorturi. Unul dintre resorturi este deformat prin întindere, iar celălalt este deformat prin comprimare.

$$G = F_{e1} + F_{e2};$$

$$mg = k_1 y + k_2 y.$$

Cele două resorturi s-au deformat cu aceeaşi cantitate y.

Pentru calculul constantei de elasticitate echivalente vom considera un alt resort, care sub acţiunea aceleiaşi greutăţi G să se alungească cu aceeaşi cantitate y.

$$G = F_e;$$

$$mg = ky;$$

$$ky = k_1 y + k_2 y;$$

$$k = k_1 + k_2;$$

$$T'' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

$$T' > T''.$$

Problema 71

Să se determine perioada oscilaţiilor mici pentru punctul material reprezentat în desenul din figura I.123.

Rezolvare

Forţa sub acţiunea căreia se execută oscilaţiile este:

$$F = G_t \sin\alpha = mg\sin\theta \sin\alpha.$$

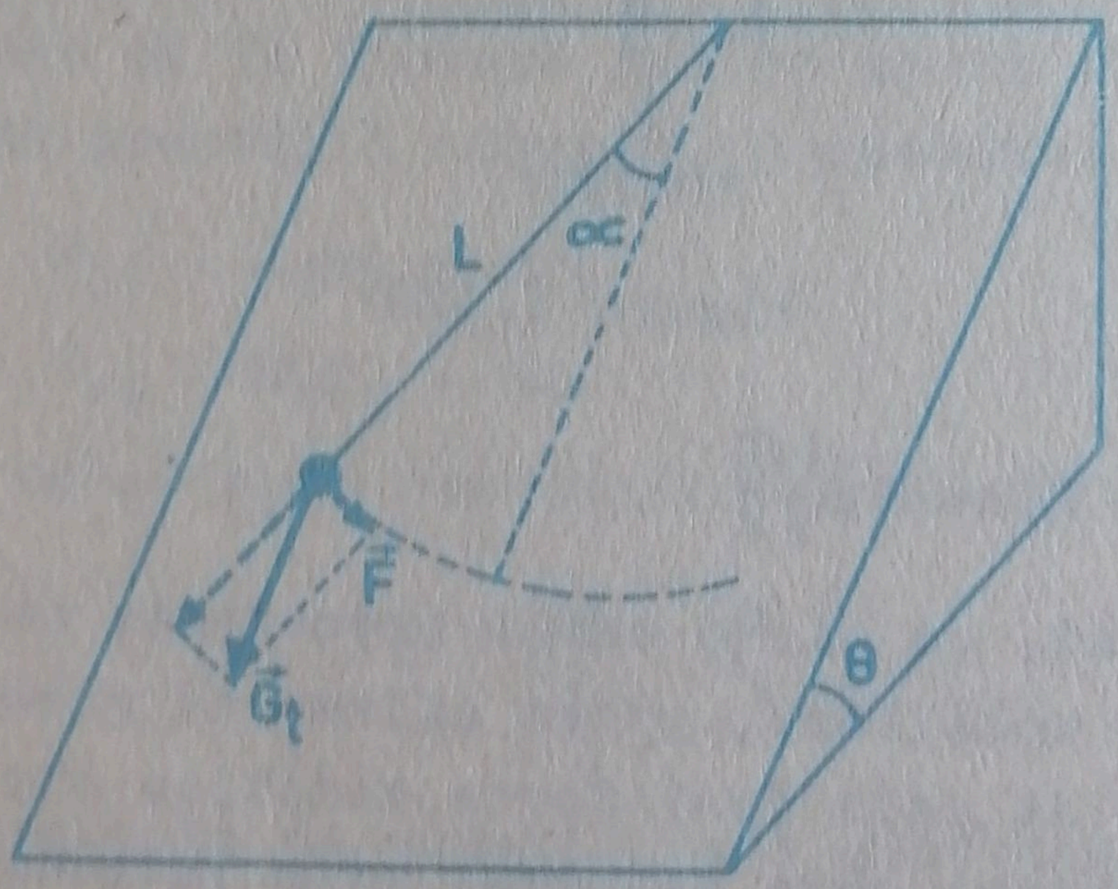


Figura I.123

In ideea că oscilaţiile sînt mici, forţa F este o forţă de tip elastic, adică direct proporţională cu elongaţia şi orientată invers faţă de aceasta:

$$F = mg \alpha \sin\theta;$$

$$\vec{F} = \vec{F}_e = - k\vec{y}; \quad F = F_e = ky;$$

$$mg \alpha \sin\theta = ky; \; y = \alpha L; \; k = m\omega^2;$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g \sin\theta}}.$$

Problema 72

Un pendul este format dintr-un corp cu masa m, aşezat la capătul unei tije metalice foarte uşoară, cu lungimea L, suspendată de un suport printr-o articulaţie fără frecare. La distanţa d faţă de articulaţie tija este prinsă simetric de două resorturi identice foarte uşoare, aflate în poziţie orizontală, avînd constanta de elasticitate k.

1) **Să se determine perioada oscilaţiilor mici ale pendulului.**

2) **Cum se modifică perioada oscilaţiilor dacă pendulul se află într-un ascensor care urcă sau coboară cu acceleraţia a?**

Rezolvare

1) Forţele sub acţiunea se efectuează oscilaţiile sistemului ($\vec{G}$; $\vec{F}_{e1}$; $\vec{F}_{e2}$) sînt reprezentate în desenul din figura I.124.

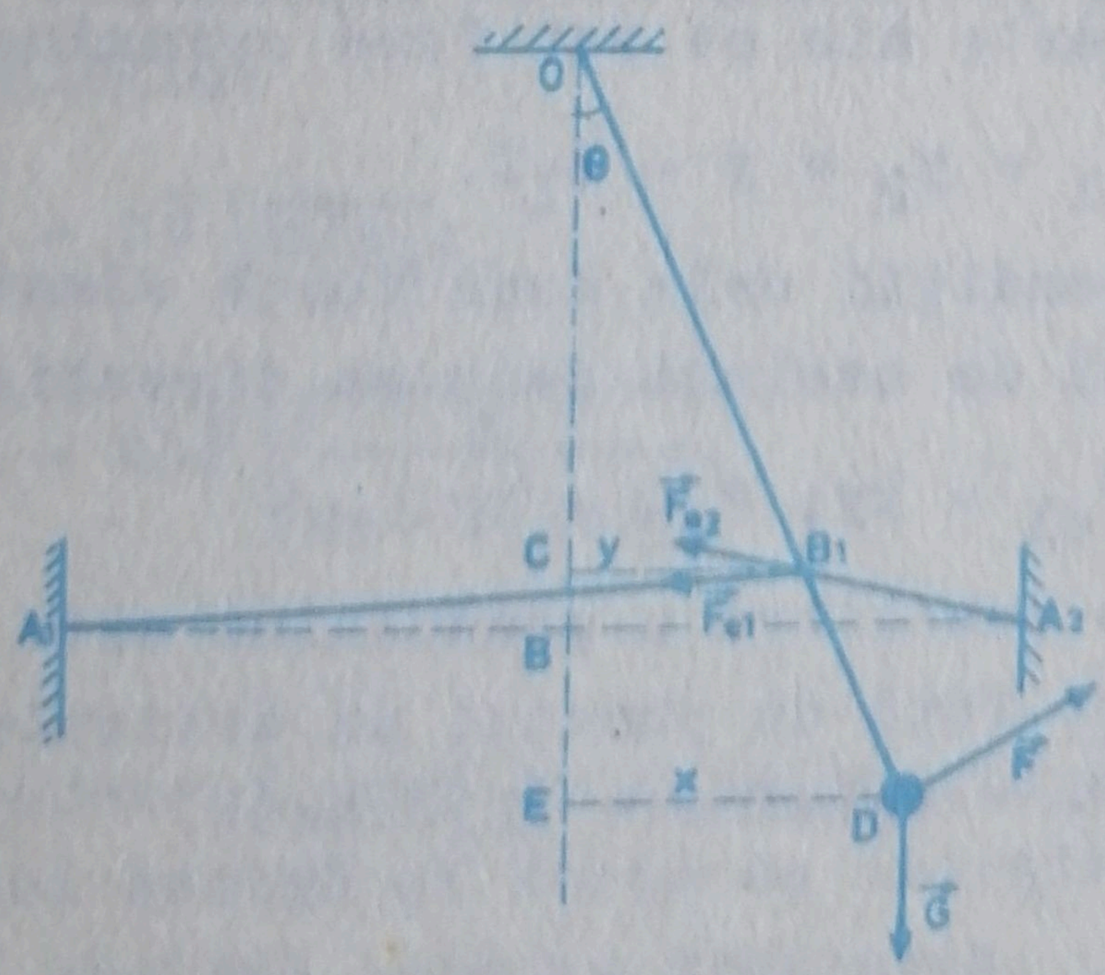


Figura I.124

În timpul mişcării un resort este deformat prin întindere, iar celălalt este deformat prin comprimare.

Cele trei forţe ($\vec{G}$; $\vec{F}_{e1}$; $\vec{F}_{e2}$) pot fi înlocuite cu o singură forţă ($\vec{F}_e$), care să acţioneze în punctul D, perpendicular pe OD, în aşa fel încît perioada oscilaţiilor să nu se schimbe.

Deomnstrînd că această forţă echivalentă este o forţă de tip elastic, adică este de forma:

$$\vec{F}_e = - k_e\vec{x}; \quad F_e = k_e x,$$

dovedim că oscilaţiile sistemului sînt armonice.

Pentru unghiuri θ foarte mici elongaţia mişcării este reprezentată prin segmentul orientat:

$$\overrightarrow{ED} = \vec{x}.$$

Determinarea forţei $\vec{F}_e$ se poate face acţionînd în punctul D cu o forţă $\vec{F}$ perpendiculară pe OD, care deplasează pendulul cu un unghi foarte mic θ, menţinîndu-l într-o stare de echilibru static. Ca urmare:

$$\vec{F} = - \vec{F}_e; \quad \vec{F} = k_e\vec{x}; \quad F = k_e x.$$

In starea de echilibru static forţa $\vec{F}$ echilibrează efectul forţelor elastice din resorturi, al reacţiunii articulaţiei şi al greutăţii pendulului.

$$\vec{F}_{e1} = - k\vec{y}_1; \quad F_{e1} = ky_1;$$

$$\vec{F}_{e2} = - k\vec{y}_2; \quad F_{e2} = ky_2.$$

Pentru θ foarte mic se pot face aproximaţiile:

$$y_1 = y_2 = y = B_1C.$$

In aceste condiţii cele două forţe elastice se pot considera colineare şi de acelaşi sens pe direcţia y.

$$F_{e1} = ky; \quad F_{e2} = ky.$$

Condiţia de echilibru a pendulului este dată de ecuaţia momentelor forţelor faţă de punctul de articulaţie:

$$FL = mgL\sin\theta + 2kyd\cos\theta;$$

$$F = mg\sin\theta + 2\frac{kyd}{L}\cos\theta;$$

$$\sin\theta = \frac{DE}{OD} = x/L;$$

$$tg\theta = \frac{B_1C}{OC} = y/d.$$

Deoarece θ este foarte mic se pot face următoarele aproximaţii:

$$\cos\theta = 1;$$

$$\sin\theta = tg\theta;\ x/L = y/d;$$

$$y = \frac{d}{L}x.$$

Introducînd în expresia lui F, rezultă:

$$F = mg\frac{x}{L} + 2\frac{kd^2}{L^2}x = ((\frac{mg}{L} + 2\frac{kd^2}{L^2})x;$$

$$k_e = \frac{mg}{L} + 2\frac{kd^2}{L^2};$$

$$F = k_e x.$$

In desenul din figura I.12$\frac{3}{4}$ direcţia lui $\vec{F}$ este diferită de direcţia lui $\vec{x}$ deoarece în desen unghiul θ este mare. Refăcînd desenul pentru un unghi θ forte mic se constată că direcţia lui $\vec{F}$ se apropie de direcţia lui $\vec{x}$.

Rezultă:

$$\vec{F} = k_e\vec{x};$$

$$\vec{F}_e = -\vec{F};\ \vec{F}_e = -k_e\vec{x};\ F_e = k_e x.$$

Oscilaţiile sistemului fiind armonice, perioada acestora se calculează cu relaţia:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k_e};$$

$$T = 2L\pi\sqrt{\frac{m}{mgL + 2kd^2}}.$$

2) Dacă ascensorul urcă cu acceleraţia $\vec{a}$, atunci la forţa de greutate $\vec{G}$ se mai adaugă şi forţa de inerţie $\vec{F}_i$ a pendulului, care acţionează în acelaşi sens cu greutatea.

Refăcînd calculele rezultă:

$$T' = 2L\pi\sqrt{\frac{m}{m(g + a)L + 2kd^2}}.$$

Cînd ascensorul coboară cu acceleraţia $\vec{a}$ $(a < g)$, rezultă:

$$T'' = 2L\pi\sqrt{\frac{m}{m(g - a)L + 2kd^2}}.$$

Dacă ascensorul în care este suspendat pendulul cade liber $(a = g)$, perioada oscilaţiilor devine:

$$T_o = 2\frac{L}{d}\pi\sqrt{m/2k}.$$

Inlăturarea resorturilor $(k = o)$ conduce la:

$$T = 2\pi\sqrt{L/g};$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + a}};\quad T'' = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g - a}};\quad T_o = \infty.$$

Problema 73

Două corpuri cu masele m_1 şi respectiv m_2, legate printr-un resort elastic cu masa neglijabilă şi constanta de elasticitate k, alunecă fără frecare pe un ghidaj orizontal. La momentul iniţial i se imprimă primului corp viteza v_o, orientată spre corpul al doilea. Să se determine;

1) perioada oscilaţiilor sistemului;

2) energia şi amplitudinea oscilaţiilor.

Rezolvare

1) In desenul din figura I.125 am reprezentat sistemul la un moment oarecare t, considerînd resortul deformat prin comprimare cu cantitatea x.

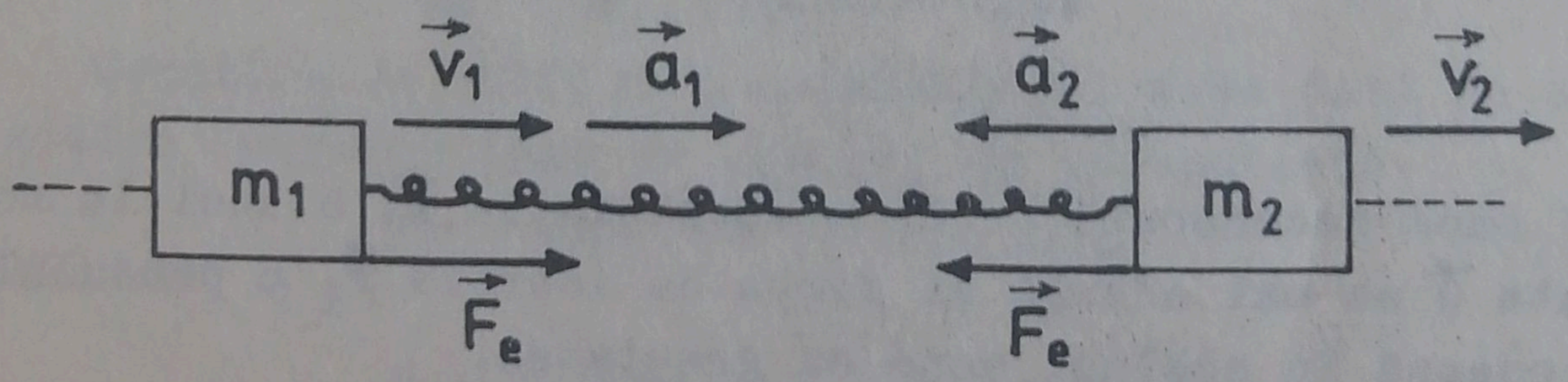


Figura I.125

Din principiul fundamental al dinamicii scris pentru fiecare corp rezultă:

$$m_1 a_1 = kx; \qquad (1)$$

$$m_2 a_2 = kx, \qquad (2)$$

sau:

$$m_1 m_2 a_1 = k m_2 x;$$

$$m_1 m_2 a_2 = k m_1 x,$$

din care rezultă:

$$m_1 m_2 (a_1 + a_2) = k(m_1 + m_2)x;$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(a_1 + a_2) = kx;$$

$$\frac{m_1\ m_2}{m_1 + m_2} = \mu = \text{masa redusă a sistemului;}$$

$a_1 + a_2 = a_{1;2}$ = acceleraţia corpului 1 în raport cu corpul 2:

$$\vec{a}_{1;2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2;$$

$$a_{1;2} = kx. \qquad (3)$$

Ecuaţia (3) are aceeaşi formă cu ecuaţiile (1) sau (2) scrise pentru oscilaţiile unui singur corp.
Deosebirile dintre acestea sînt:

- mărimea x din ecuaţia (3) este deplasarea relativă a celor două corpuri, faţă de poziţiile lor de echilibru şi nu reprezintă deplasarea unui singur corp faţă de poziţia sa de echilibru;

- mărimea μ este masa redusă a sistemului şi nu masa unui singur corp.

Din (3) rezultă:

$$a_{1;2} = \frac{k}{\mu} x; \quad \frac{k}{\mu} = \omega^2; \quad a_{1;2} = \omega^2 x;$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{\mu}; \quad T = 2\pi\sqrt{\mu/k};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

Sistemul oscilează cu aceeaşi perioadă ca un singur corp cu masa μ , legat printr-un resort identic de un perete (suport) rigid. Un corp se mişcă în raport cu celălalt ca şi cum acela ar fi fix, iar el ar avea masa μ .

2) Avînd în vedere echivalenţa stabilită anterior, rezultă:

$$E = \frac{\mu v_o^2}{2} = \frac{m_1 m_2 v_o^2}{2(m_1 + m_2)};$$

$$E = kA^2/2;\ A = v_o\sqrt{\mu/k};$$

$$A = v_o\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

Problema 74

Pe o linie cu pernă de aer se află în repaus două corpuri (a; b), identice, fiecare cu masa m, conectate printr-un resort elastic nedeformat, avînd lungimea L_o şi constanta de elasticitate k. Un al treilea corp (c), identic cu primele, în mişcare cu viteza v pe aceeaşi linie, loveşte perfect elastic corpul a.

1) Să se demonstreze că după ciocnire, corpurile a şi b se vor mişca în acelaşi sens.

2) Să se determine limitele intervalului valorilor distanţei dintre corpurile a şi b.

Rezolvare

I) Ciocnirea lui c cu a fiind perfect elastică, imediat după ciocnire avem:

$$v_c = o;\ v_a = v;\ v_b = o;\ \text{resort nedeformat.}$$

Fie $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ (avînd aceeaşi orientare cu v) vitezele corpurilor a şi respectiv b la un moment oarecare după ciocnire, iar x deformarea resortului la acelaşi moment.

Din legea conservării impulsului şi din legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$m_c\vec{v}_c = m_a\vec{v}_a + m_b\vec{v}_b;$$

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2;$$

$$mv = mv_1 + mv_2;$$

$$v = v_1 + v_2; \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2};$$

$$v_1v_2 = kx^2/m. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2), deoarece:

$$v_1 + v_2 > 0;$$

$$v_1v_2 > 0,$$

rezultă că ambele corpuri se vor mişca în acelaşi sens.

In timpul mişcării ansamblului (a; b) viteza corpului a scade de la valoarea v la valoarea zero, în timp ce viteza corpului b creşte de la valoarea zero la valoarea v, pentru ca apoi viteza lui a să crească de la zero la v, în timp ce viteza lui b scade de la v la zero ş.a.m.d.

2) In timp ce vitezele corpurilor a şi b variază se modifică şi distanţa dintre ele.

Distanţa minimă dintre corpurile a şi b corespunde comprimării maxime a resortului.

Din (2) rezultă că x^2 este maxim (deci şi x este maxim) atunci cînd produsul v_1v_2 este maxim;

$$x^2_{max} = \frac{2m}{k}(v_1v_2)_{max} \qquad (3)$$

Se ştie că, întotdeauna, este adevărată inegalitatea:

$$(v_1 + v_2)^2 \geq 4v_1v_2.$$

Deoarece:

$$v_1 + v_2 = v,$$

rezultă:

$$4v_1v_2 < v^2;$$

$$v_1 v_2 \leq v^2/4;$$

$$(v_1 v_2)_{max} = v^2/4. \qquad (4)$$

Din (1) şi (4) rezultă că valorile vitezelor v_1 şi v_2 pentru care produsul $v_1 v_2$ este maxim, sînt:

$$v_1 = v_2 = v/2.$$

Din (3) rezultă:

$$x_{max}^2 = mv^2/2k; \; x_{max} = \pm v\sqrt{m/2k};$$

$$L - v\sqrt{\frac{m}{2k}} \leq d \leq L + v\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Distanţa dintre a şi b este minimă sau maximă atunci cînd vitezele corpurilor sînt egale.

Problema 75

Pe o pantă cu înclinaţia θ faţă de orizontală alunecă fără frecare, pornind din repaus, un camion cu masa M. Un corp cu masa m se mişcă fără frecare în caroseria camionului, pornind cu viteza v_o din punctul superior spre punctul cel mai de jos al caroseriei. Cunoscînd lungimea caroseriei (L) şi coeficientul de restituire (e) corespunzător ciocnirii dintre corp şi peretele caroseriei camionului, să se determine vitezele celor două elemente după ciocnirea a n-a.

Rezolvare

Deoarece frecările sînt neglijabile, între oricare două ciocniri consecutive, mişcarea corpului în raport cu camionul este rectlinie şi uniformă, de fiecare dată viteza relativă avînd altă valoare.

Inaintea primei ciocniri viteza corpului în raport cu camionul este v_o. Astfel prima ciocnire se produce după timpul:

$$t_1 = L/v_o = L/e^o v_o.$$

Fie: $v_1 = v_o + at_1$;

$u_1 = at_1$,

viteza corpului şi respectiv viteza camionului înaintea primei ciocniri, iar v_1' şi u_1' vitezele aceloraşi corpuri imediat după prima ciocnire.

Din definiţia coeficientului de restituire rezultă:

$$e = - \frac{v_1' - u_1'}{v_1 - u_1};$$

$$e = - \frac{v_1' - u_1'}{v_o};$$

$$v_1' - u_1' = - ev_o.$$

Expresia: $v_1' - u_1'$, reprezintă viteza relativă a corpului în raport cu camionul după prima ciocnire. Această viteză relativă îşi păstrează valoarea pînă în momentul producerii celei de a doua ciocniri.

Intervalul de timp de la prima ciocnire pînă la realizarea celei de a doua ciocniri este:

$$t_2 = L/ev_o.$$

Fie v_n şi u_n vitezele corpului şi respectiv camionului, în raport cu solul, înaintea ciocnirii a n-a, iar v_n' şi u_n' vitezele absolute ale aceloraşi corpuri după ciocnirea a n-a.

Generalizînd rezultă că viteza corpului în raport cu camionul, după a n-a ciocnire este:

$$v_n' - u_n' = (-e)^n v_o,$$

iar intervalul de timp dintre ciocnirea de ordinul n-1 şi ciocnirea a n-a este:

$$t_n = L/e^{n-1}v_o.$$

Din legea conservării impulsului şi din definiţia coeficientului de restituire, rezultă:

$$m\bar{v}_n' + M\bar{u}_n' = m\bar{v}_v + M\bar{u}_n;$$

$$mv_n' + Mu_n' = mv_n + Mu_n; \qquad (1)$$

$$v'_n - u'_n = (-e)^n v \ . \qquad (2)$$

Din teorema variaţiei impulsului unui sistem mecanic se ştie că raportul dintre variaţia impulsului sistemului mecanic şi durata acestei variaţii este egal cu rezultanta forţelor externe care acţionează asupra sistemului:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = R.$$

Rezultă:

$$\frac{mv_n + Mu_n - mv_o}{t_1 + t_2 + ..+t_n} = (m + M)g\sin\theta;$$

$$mv_n + Mu_n = mv_o + (m + M)g(\sum_{i=1}^{n} t_i)\sin\theta;$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = T;$$

$$mv_n + Mu_n = mv_o + (m + M)gT\sin\theta. \qquad (3)$$

Din (1) şi (3) rezultăâ:

$$v'_n = \frac{m + (-e)^n M}{m + M} v_o + gT\sin\theta;$$

$$u'_n = \frac{1 - (-e)^n}{m + M} mv_o + gT\sin\theta;$$

$$T = \frac{L}{v_o}(1 + e^{-1} + e^{-2} + \ldots + e^{-n+1});$$

$$T = \frac{L(1 - e^n)e^{1-n}}{v_o(1-e)}.$$

Problema 76

Trei sfere omogene cu masele m_1, m_2, m_3 se află în repaus pe o suprafaţă orizontală, separate prin intervale foarte mici. Se imprimă sferei S_1 o mişcare de translaţie cu viteza v_1, orientată pe linia centrelor sferelor, spre sfera S_2.

Se va produce o ciocnire, mai întîi între S_1 şi S_2 şi apoi între S_2 şi S_3. Cunoscînd coeficienţii de restituire corespunzători celor două ciocniri (e_{12} şi e_{23}) să se determine viteza sferei S_3. Să se demonstreze că această viteză are valoarea maximă, dacă şi numai dacă $m_2^2 = m_1 m_3$.

Rezolvare

Prin definiţie, se numeşte coeficient de restituire în ciocnirea dintre corpul j şi corpul k, expresia:

$$e_{jk} = - \frac{v'_{jk}}{v_{jk}},$$

în care:

v_{jk} = viteza corpului j în raport cu corpul k, înainte de ciocnire;

$\vec{v}_{jk} = \vec{v}_j - \vec{v}_k$;

v'_{jk} = viteza corpului j în raport cu corpul k, după ciocnire;

$\vec{v}'_{jk} = \vec{v}'_j - \vec{v}'_k$;

$\vec{v}_j$; $\vec{v}_k$ = vitezele corpurilor înainte de ciocnire;

$\vec{v}'_j$; $\vec{v}'_k$ = vitezele corpurilor după ciocnire.

Pentru ciocnirea S_1; S_2 se pot scrie expresiile:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}_2;$$

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v_2;$$

$$e_{12} = - \frac{v'_1 - v_2}{v_1}.$$

Rezultă:

$$v'_1 = \frac{m_1 - e_{12} m_2}{m_1 + m_2} v_1; \quad v_2 = \frac{(1 + e_{12}) m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Pentru ciocnirea S_2; S_3 se pot scrie expresiile:

$$m_2\vec{v}_2 = m_2\vec{v}_2' + m_3\vec{v}_3;$$

$$m_2 v_2 = m_2 v_2' + m_3 v_3;$$

$$e_{23} = -\frac{v_2' - v_3}{v_2}.$$

Rezultă:

$$v_2' = \frac{m_2 - e_{23}m_3}{m_2 + m_3} v_2;\quad v_3 = \frac{(1 + e_{23})m_2}{m_2 + m_3} v_2;$$

$$v_3 = \frac{(1 + e_{12})(1 + e_{23})m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} v_1.$$

Derivata lui v_3 în raport cu m_2 este:

$$\frac{dv_3}{dm_2} = (1 + e_{12})(1 + e_{23}) \frac{m_1(m_1 m_3 - m_2^2)v_1}{(m_1 + m_2)^2(m_2 + m_3)^2}.$$

Această derivată este pozitivă, nulă sau negativă, după cum m_2 este mai mic, egal sau mai mare decît $\sqrt{m_1 m_3}$.

Rezultă că v_3 este maxim dacă şi numai dacă $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$.

$$v_{3;max} = (1 + e_{12})(1 + e_{23})\left\{\frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_3}}\right\}^2 v_1.$$

Problema 77

Două pendule conice cu lungimile L_1 şi respectiv L_2, suspendate în acelaşi punct, se află tot timpul în acelaşi plan orizontal. Se cunosc unghiurile dintre generatoarele celor două conuri şi verticala punctului de suspensie.

1) Dacă la momentul iniţial cele două fire se află în acelaşi plan vertical, după cît timp cele două fire se vor mai afla împreună într-un plan vertical?

2) Care dintre cele două corpuri va atinge solul mai repede şi care va avea la sol o viteză mai mare, dacă cele două fire se rup simultan?

Rezolvare

1) Din desenul prezentat în figura I.126, rezultă:

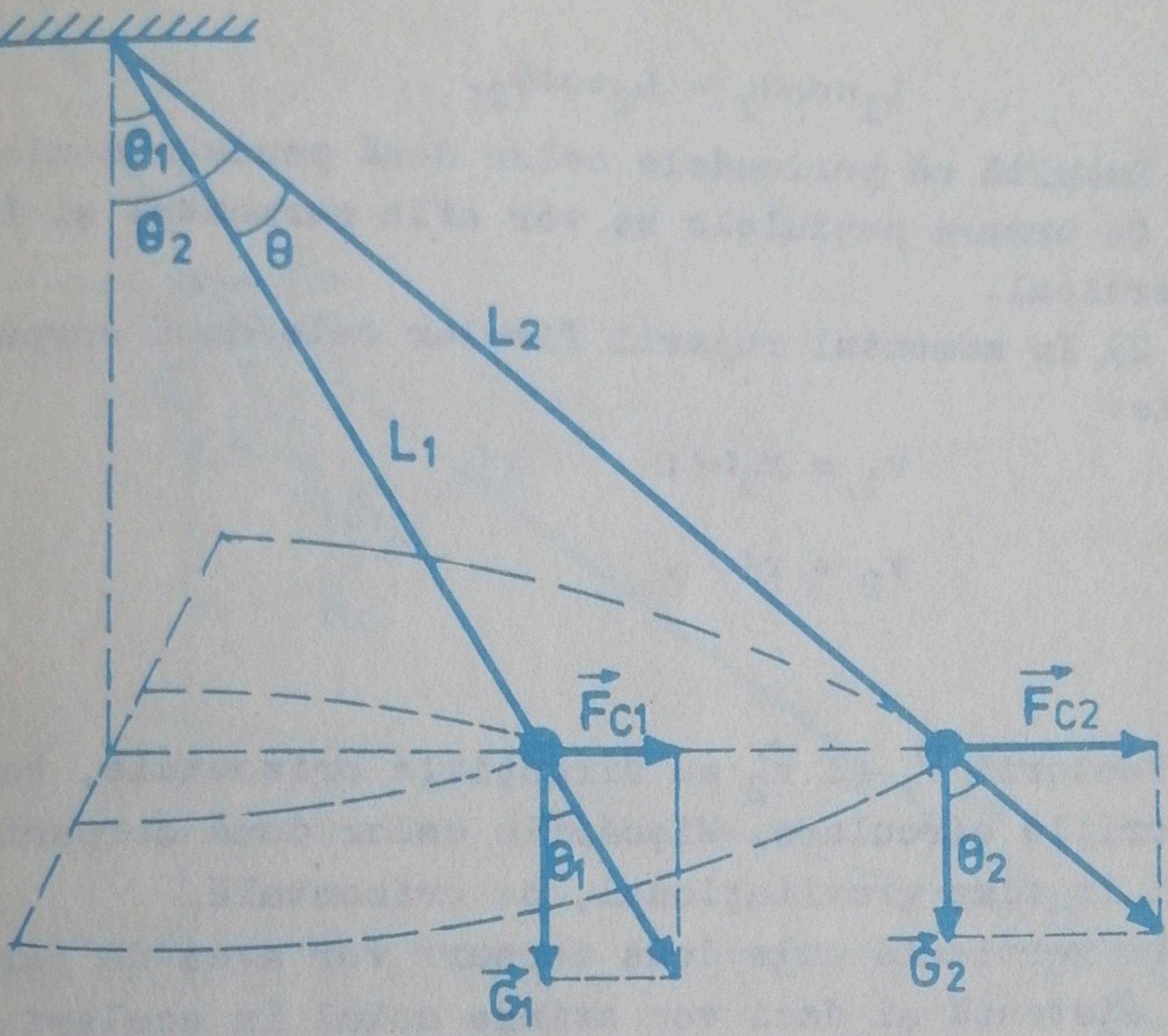


Figura I.126

$$tg\theta_1 = F_{c1}/G_1 = r_1/L_1\cos\theta_1;$$

$$\frac{m_1 r_1 \omega_1^2}{m_1 g} = \frac{r_1}{L_1\cos\theta_1};$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L_1\cos\theta_1} = \frac{4\pi^2}{T_1^2};$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1\cos\theta_1}{g}};$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2\cos\theta_2}{g}}.$$

Cele două corpuri aflîndu-se în orice moment în acelaşi plan orizontal, însemnează că proiecţiile pe verticală ale celor două fire de suspensie sînt egale, adică:

$$L_1 \cos\theta_1 = L_2 \cos\theta_2 .$$

Rezultă că perioadele celor două pendule conice sînt egale. Ca urmare pendulele se vor afla permanent şi în acelaşi plan vertical.

2) In momentul ruperii firelor cele două corpuri au vitezele:

$$v_1 = r_1 \omega ;$$

$$v_2 = r \omega .$$

Vectorii $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ au direcţiile orizontale, tangente la traiectoriile circulare. Mişcările celor două corpuri vor fi aruncări în cîmp gravitaţional, pe orizontală.

Pe verticală cele două corpuri vor avea de parcurs aceeaşi distanţă şi deci vor atinge solul în acelaşi moment.

Deoarece $r_2 > r_1$ rezultă că $v_2 > v_1$ şi ca urmare va ajunge la sol cu o viteză mai mare corpul care a fost suspendat de firul mai lung.

Problema 78

Un pendul conic dublu este format dintr-un fir cu lungimea L_1 şi un corp cu masa m_1, de care este legat un fir cu lungimea L_2 avînd la celălalt capăt un corp cu masa m_2. Stiind că unghiurile făcute de cele două fire cu verticala sînt θ_1 şi respectiv θ_2 să se determine perioada pendulului.

Cazuri particulare: $L_1 = o$; $L_2 = o$.

Rezolvare

Din desenul prezentat în figura I.127, rezultă:

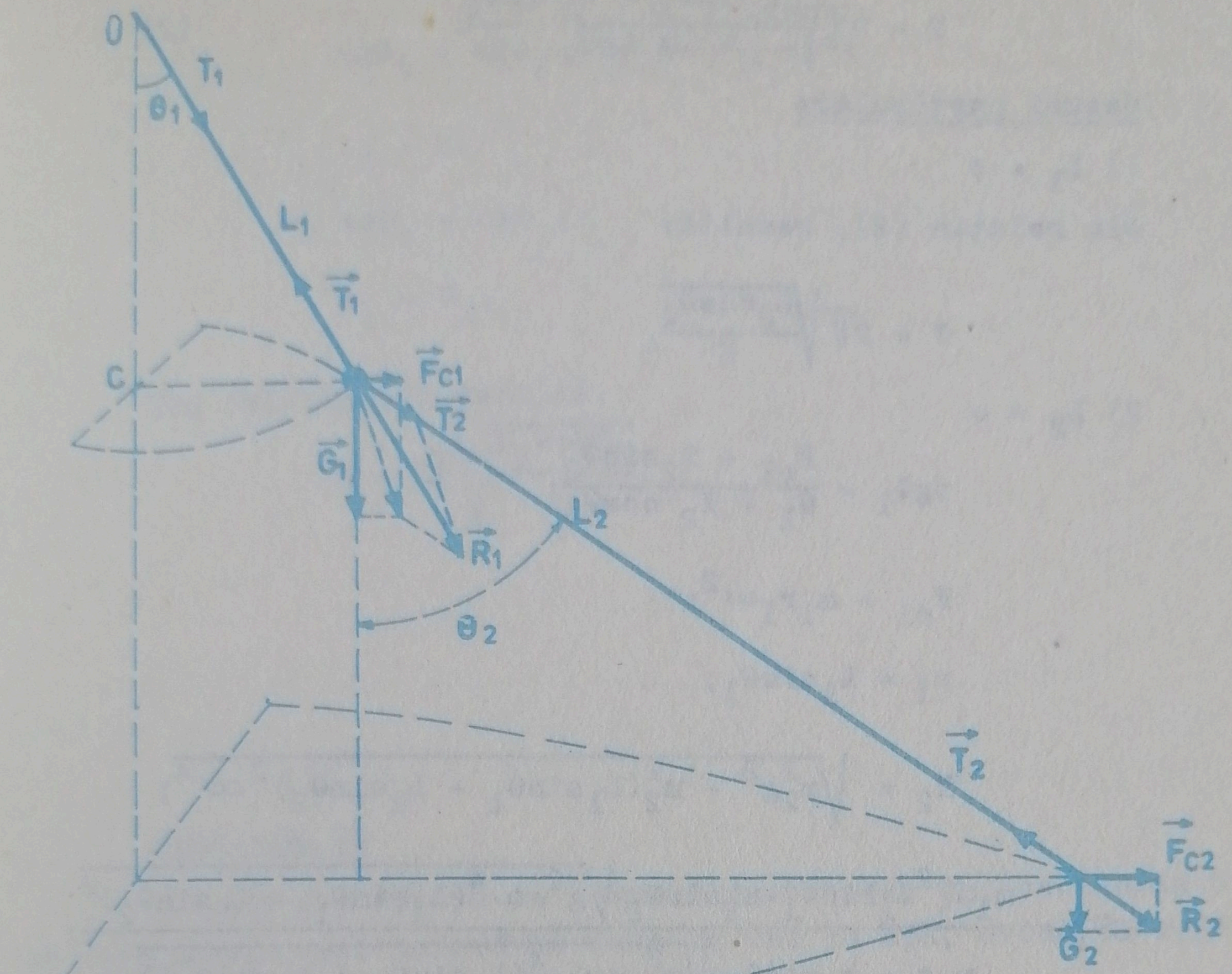


Figura I.127

$$F_{c2} = m_2 g \ tg\theta_2;$$

$$F_{c2} = m_2 r_2 \omega^2;$$

$$r_2 = L_1 sin\theta_1 + L_2 sin\theta_2;$$

$$tg\theta_2 = \frac{\omega^2}{g}(L_1 sin\theta_1 + L_2 sin\theta_2); \qquad (1)$$

$$\omega^2 = \frac{g \ tg\theta_2}{L_1 sin\theta_1 + L_2 sin\theta_2} = \frac{4\pi^2}{T^2};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2}{g\ tg\theta_2}}. \qquad (2)$$

Cazuri particulare

1) $L_1 = o$

Din relaţia (2), rezultă:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_2\cos\theta_2}{g}}.$$

2) $L_2 = o$

$$tg\theta_1 = \frac{F_{c1} + T_2\sin\theta_2}{G_1 + T_2\cos\theta_2};$$

$$F_{c1} = m_1 r_1 \omega^2;$$

$$r_1 = L_1\sin\theta_1;$$

$$T_2 = \sqrt{m_2^2 g^2 + m_2^2(L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2)^2\omega^4};$$

$$tg\theta_1 = \frac{m_1\omega^2 L_1\sin\theta_1 + m_2\sin\theta_2\sqrt{g^2+\omega^4(L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2)^2}}{m_1 g + m_2\cos\theta_2\sqrt{g^2 + \omega^4(L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2)^2}};$$

$$L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2 = \frac{g\ tg\theta_2}{\omega^2};$$

$$tg\theta_1 = \frac{m_1\omega^2 L_1\sin\theta_1 + m_2\sin\theta_2\sqrt{g^2 + g^2 tg^2\theta_2}}{m_1 g + m_2\cos\theta_2\sqrt{g^2 + g^2 tg^2\theta_2}};$$

$$tg\theta_1 = \frac{m_1\omega^2 L_1\sin\theta_1}{(m_1 + m_2)g} + \frac{m_2\ tg\theta_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Folosind relaţia (1), relaţia (3) devine:

$$tg\theta_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(tg\theta_2 - \frac{\omega^2 L_2\sin\theta_2}{g}\right) + \frac{m_2\ tg\theta_2}{m_1 + m_2};$$

$$tg\theta_1 = tg\theta_2 - \frac{\omega^2 m_1 L_2 \sin\theta_2}{g(m_1 + m_2)};$$

$$L_2 = 0;$$

$$tg\theta_1 = tg\theta_2;$$

$$\theta_1 = \theta_2.$$

Din relaţia (2) rezultă:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_1 \cos\theta_1}{g}}.$$

Problema 79

O bară cilindrică de lemn cu densitatea ρ, secţiunea S şi lungimea L este introdusă într-un vas cu apă, avînd un capăt articulat mobil de baza acestuia. Să se determine:

1) reacţiunea articulaţiei cînd bara este în poziţie verticală, în repaus;

2) perioada oscilaţiilor mici ale barei.

Rezolvare

1) Considerînd că densitatea barei de lemn este mai mică decît densitatea apei din vas, forţa arhimedică este mai mare decît greutatea barei. Reacţia articulaţiei asupra barei este:

$$R = F_A - G = m_0 g - mg = (m_0 - m)g;$$

$$R = SL(\rho_0 - \rho)g.$$

2) Desenul din figura I.128 prezintă bara de lemn deplasată faţă de poziţia de echilibru cu un unghi foarte mic θ.

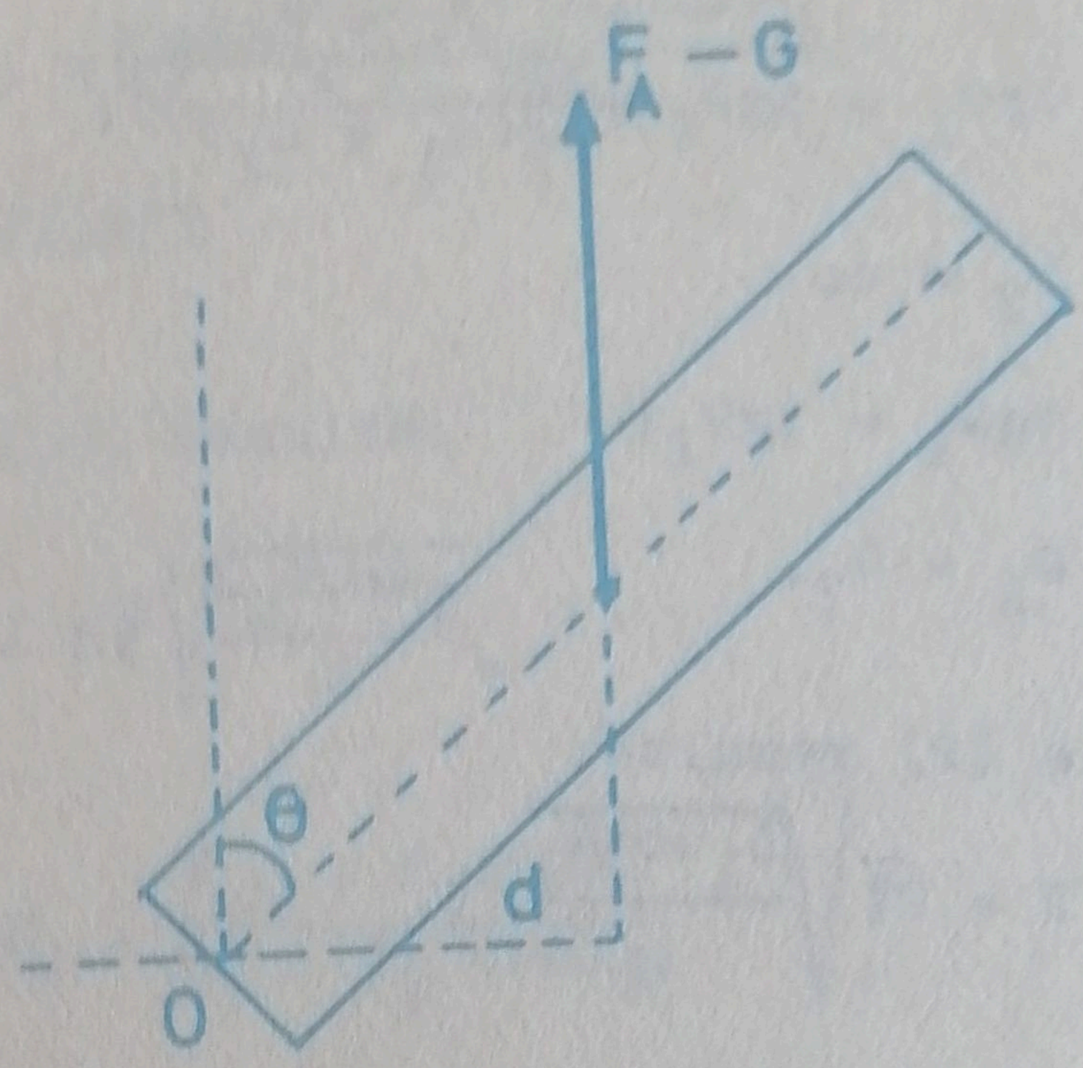


Figura I.128

Lăsată liberă, dinnaceastă poziţie, bara va efectua o mişcare de rotaţie în jurul articulaţiei, de o parte şi de alta a poziţiei de echilibru. Presupunem frecările neglijabile.

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{G};\ F = F_A - G;$$

$$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F};\ M_F = rF\sin\theta = Fd;$$

$$M_F = (F_A - G)\frac{L}{2}\sin\theta;$$

$$\vec{M}_F = I\vec{\varepsilon};\ M_F = I\varepsilon;$$

$$(F_A - G)\frac{L}{2}\sin\theta = I\varepsilon;$$

I = momentul de inerţie al barei în raport cu un capăt;

$$I = mL^2/3;$$

$$\varepsilon = \frac{(F_A - G)L\sin\theta}{2I};$$

$$\frac{L}{2} = \frac{(F_A - G)L}{2I}\frac{L}{2}\sin\theta.$$

Pentru θ foarte mic se poate face aproximaţia:

$$\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{L}{2}\theta = y = \text{elongaţia mişcării.}$$

De la mişcarea circulară se ştie că:

$$a = \varepsilon \frac{L}{2}.$$

Rezultă:

$$a = \frac{(F_A - G)L}{2I} y.$$

Intr-o mişcare oscilatorie armonică există relaţia:

$$a = \omega^2 y.$$

Prin identificare rezultă:

$$\omega^2 = \frac{(F_A - G)L}{2I} = \frac{4\pi^2}{T^2};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2mL^2}{3(m_o - m)gL}};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3(\rho_o - \rho)g}};$$

$L_1 = \frac{2L}{3(\rho_o - \rho)}$ = lungimea redusă a pendulului;

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{g}}.$$

Problema 80

O bară rigidă cu masa m_1 şi lungimea L_1, avînd la un capăt o sferă cu masa m_2 şi raza foarte mică, este articulată la celălalt capăt şi oscilează fără frecare în plan vertical. Să se determine perioada micilor oscilaţii ale acestui pendul fizic. Cazuri particulare: 1) $m_1 = o$; 2) $m_2 = o$.

Rezolvare

Cele două corpuri, solidar legate, prezentate în desenul din figura I.129, formează corp comun al cărui centru de greutate se află la distanţa L faţă de articulaţie (OC = L).

C-da 69 coala 16

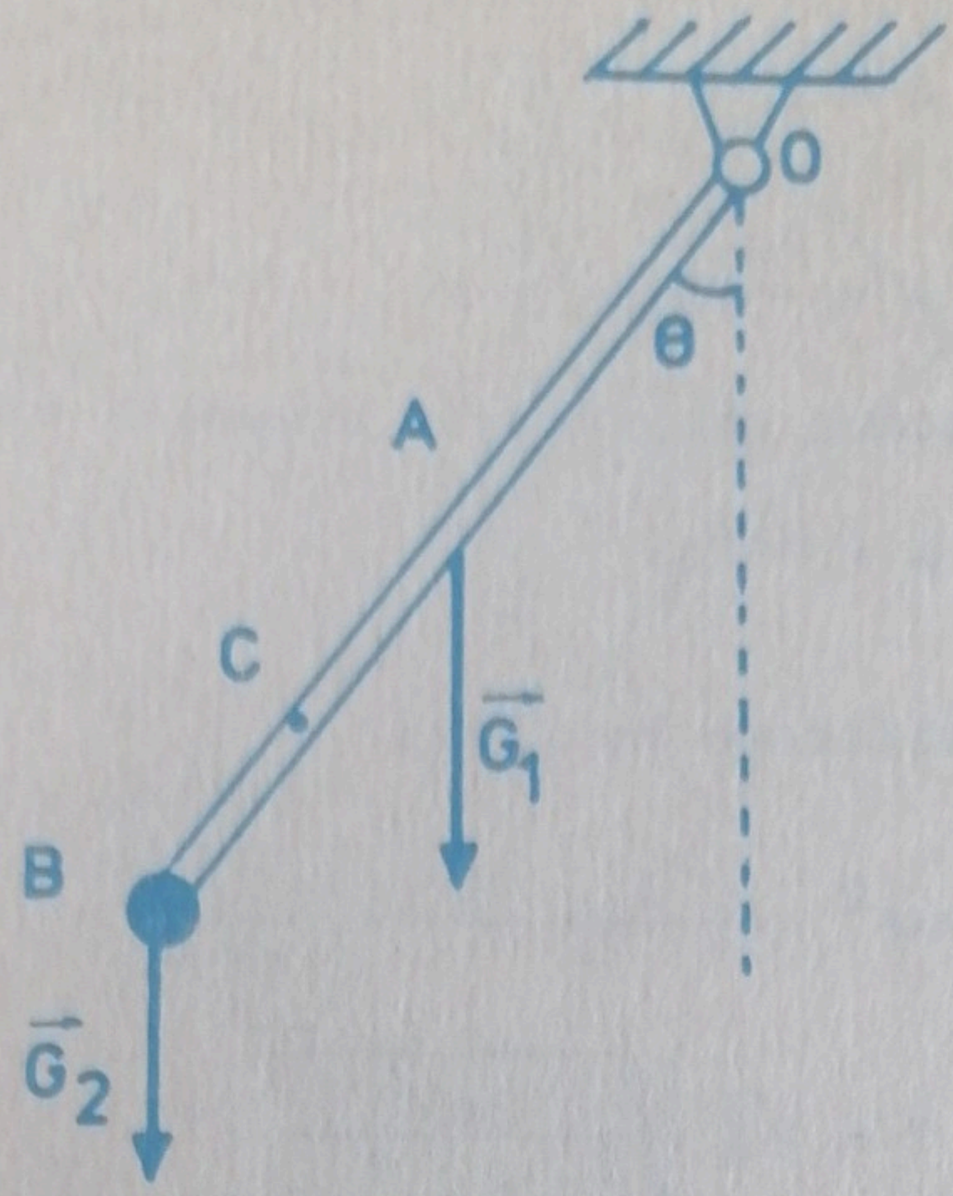


Figura I,129

In centrul de greutate acţionează greutatea totală:

$$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2;\ G = G_1 + G_2;\ G = (m_1 + m_2)g.$$

Mişcarea de rotaţie a pendulului în jurul articulaţiei O este caracterizată de momentul forţei $\vec{G}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G} = \vec{L} \times \vec{G};$$

$$M = (m_1 + m_2)gL\sin\theta.$$

Folosind principiul fundamental al dinamicii aplicat la mişcarea de rotaţie rezultă:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon};\ M = I\varepsilon;\ I = I_1 + I_2;$$

$I_1 = m_1L_1^2/3$ = momentul de inerţie al barei în raport cu un capăt al său;

$I_2 = m_2L_1^2$ = momentul de inerţie al sferei, considerată punct material, faţă de O;

$$I = \frac{m_1 + 3m_2}{3} L_1^2;$$

$$I\varepsilon = (m_1 + m_2)gL\sin\theta;$$

$$\varepsilon = \frac{(m_1 + m_2)gL\sin\theta}{I};$$

$$L\varepsilon = \frac{(m_1 + m_2)gL^2\sin\theta}{I};$$

$$a = L\varepsilon\ ;$$

$$a = \frac{(m_1 + m_2)gL}{I} L\sin\theta.$$

Pentru valori mici ale lui θ, rezultă:

$$a = \frac{(m_1 + m_2)gL}{I} L\theta;$$

$$L\theta = y;$$

$$a = \frac{(m_1 + m_2)gL}{I} y;\ a = \omega^2 y;$$

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)gL}{I} = \frac{4\pi^2}{T^2};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(m_1 + m_2)gL}}\ .$$

In desenul din figura I.13o, pe segmentul OB a cărui lungime este L_1, considerăm două corpuri (puncte materiale) astfel: un punct material cu masa m_1 la mijlocul barei reprezentînd masa barei concentrată în centrul de masă al acesteia şi un punct material de masă m_2, reprezentînd masa sferei.

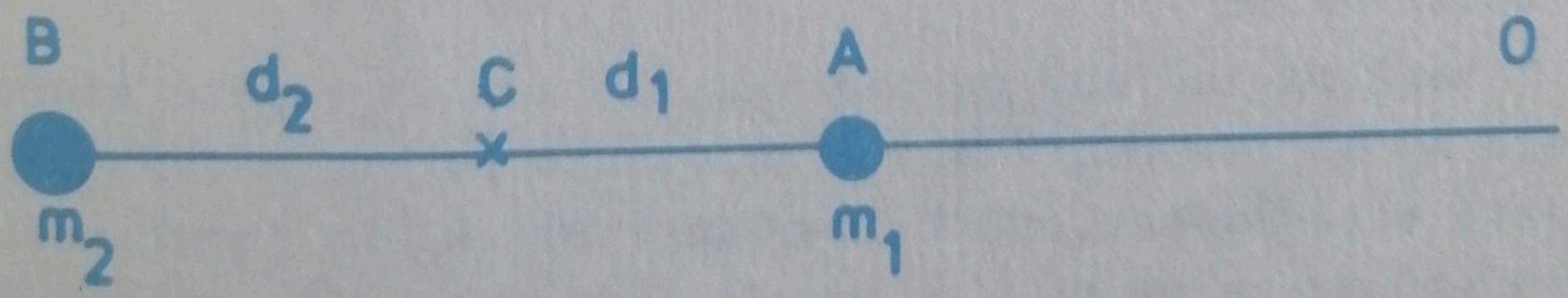


Figura I.13o

Centrul de masă al sistemului se află între cele două puncte materiale şi el coincide cu centrul de greutate al pendulului fizic studiat. Pentru a găsi poziţia acestuia punem condiţia ca faţă de acest punct suma momentelor celor două forţe de greutate să fie zero:

$$m_1 g d_1 - m_2 g d_2 = o;$$

$$m_1 d_1 = m_2 d_2;$$

$$\frac{L_1}{2} = d_1 + d_2;$$

$$d_1 = \frac{L_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}; \quad d_2 = \frac{L_1 m_1}{2(m_1 + m_2)};$$

$$L = OA + AC = \frac{L_1}{2} + d_1 = \frac{L_1(m_1 + 2m_2)}{2(m_1 + m_2)};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2(m_1 + 3m_2)L_1}{3(m_1 + 2m_2)g}}.$$

Cazuri particulare

1) $m_1 = o$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{g}}.$$

2) $m_2 = o$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2L_1}{g}}.$$

Problema 81

O bară rigidă AB, foarte uşoară, are la capete sferele cu masele m_1 şi respectiv m_2, considerate puncte materiale. Bara poate efectua oscilaţii în plan vertical în jurul unei axe ce trece printr-un punct O al barei, aflat la distanţa d_1 faţă de A şi la distanţa d_2 faţă de B. Să se determine perioada oscilaţiilor mici ale acestui pendul.

Rezolvare

Pendulul este prezentat în desenul din figura I.131.

Mişcarea de rotaţie a pendulului este caracterizată de următoarele ecuaţii:

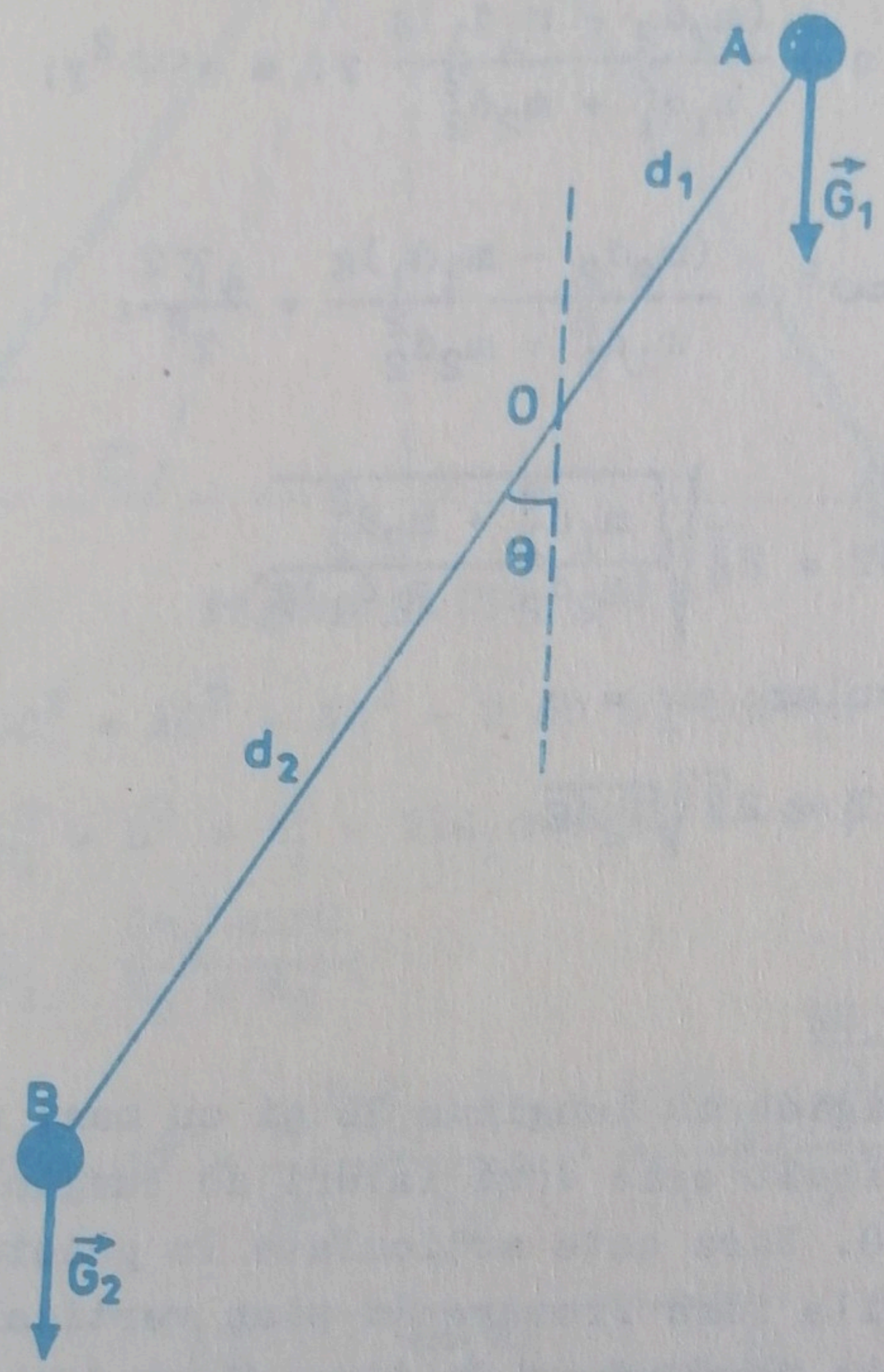


Figura I.131

$$M = G_2 d_2 \sin\theta - G_1 d_1 \sin\theta;$$

$$M = I\varepsilon;$$

$$I = I_1 + I_2 = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2;$$

$$(m_2 d_2 - m_1 d_1) g \sin\theta = (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) \quad ;$$

$$\varepsilon = \frac{(m_2 d_2 - m_1 d_1) g}{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2} \sin\theta;$$

$$d_2\varepsilon = a = \frac{(m_2d_2 - m_1d_d)g}{m_1d_1^2 + m_2d_2^2}\, d_2\sin\theta;$$

$$d_2\sin\theta = d_2\theta = y;$$

$$a = \frac{(m_2d_2 - m_1d_1)g}{m_1d_1^2 + m_2d_2^2}\, y;\quad a = \omega^2 y;$$

$$\omega^2 = \frac{(m_2d_2 - m_1d_1)g}{m_1d_1^2 + m_2d_2^2} = \frac{4\pi^2}{T^2};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1d_1^2 + m_2d_2^2}{(m_2d_2 - m_1d_1)g}}.$$

Caz particular: $m_1 = o$

$$T = 2\pi\sqrt{d_2/g}.$$

Problema 82

O bară rigidă cu lungimea 2L şi cu masa neglijabilă este îndoită astfel încît cele două laturi de lungimi egale să formeze un unghi 2θ. Bara este articulată în punctul de la mijlocul ei şi poate oscila fără frecare în plan vertical. La capetele barei sînt fixate două sfere de dimensiuni foarte mici, avînd masele m_1 şi respectiv m_2. Să se determine perioada oscilaţiilor mici ale acestui pendul.

Rezolvare

Centrul de masă al sistemului se află pe dreapta care uneşte cele două puncte materiale, în punctul C, aşa cum indică desenul din figura I.132.

$$d_1 \equiv AC;\ d_2 = BC;\ d = AB = 2L\sin\theta;$$

$$d_1 = \frac{m_2d}{m_1 + m_2};\ d_2 = \frac{m_1d}{m_1 + m_2};\ L_1 = OC;\ AO = L;$$

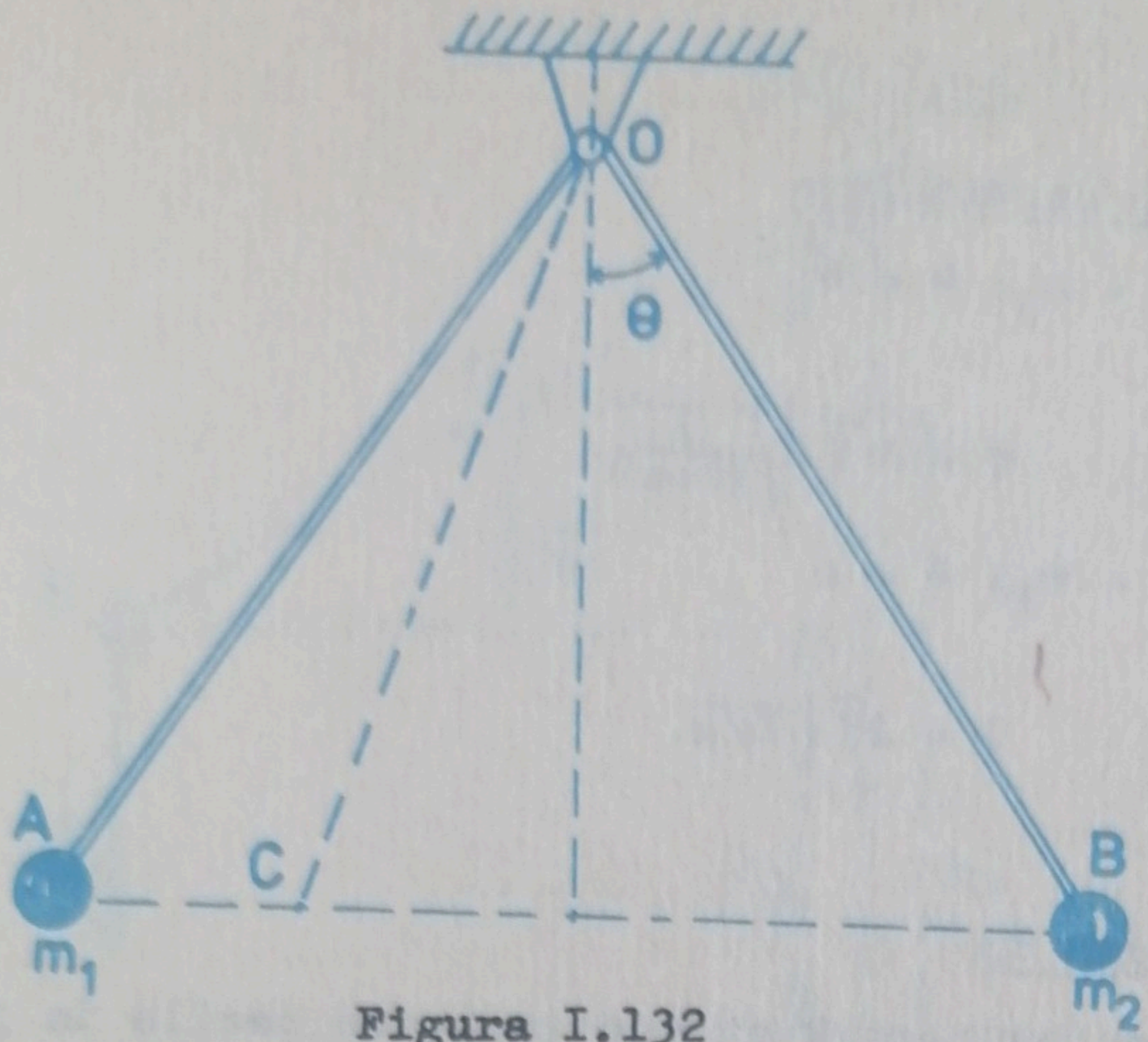


Figura I.132

$$OC^2 = AO^2 + AC^2 - 2\,AO\,AC\cos\theta_1;$$

$$L_1^2 = L^2 + d_1^2 - 2Ld_1\cos(90^o - \theta);$$

$$d_1 = \frac{2m_2L\sin\theta}{m_1 + m_2};$$

$$L_1^2 = L^2 + \frac{4L^2m_2^2\sin^2\theta}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{4L^2m_2\sin^2\theta}{m_1 + m_2};$$

$$L_1 = L\sqrt{1 - \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}\sin^2\theta};$$

$$I = m_1L^2 + m_2L^2 = (m_1 + m_2)L^2;$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL_1}};\quad M = m_1 + m_2;$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\sqrt{1 - \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}\sin^2\theta}}}.$$

Cazuri particulare

1) $m_1 = m_2$; $\theta \neq 0$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g\cos\theta}}.$$

2) $m_1 = m_2$; $\theta = 0$

$$T = 2\pi \sqrt{L/g}.$$

Problema 83

Un disc cu raza R şi masa m poate oscila în jurul unei axe (Δ) perpendiculară pe planul său într-un punct A de pe circumferinţa discului. Momentul de inerţie al discului în raport cu axa este $I_1 = 3mR^2/2$. Intr-un punct diametral opus lui A se fixează un corp cu dimensiunile neglijabile şi cu masa m/2. Se îndepărtează sistemul de la poziţia de echilibru astfel ca diametrul AB să facă un unghi θ_o cu verticala, apoi se lasă liber fără viteză iniţială. La trecerea prin poziţia verticală masa din B se desprinde.

1) Ce unghi maxim va face diametrul AB cu verticala punctului A după ce s-a desprins corpul din B?

2) Ce viteză va avea corpul din B imediat ce s-a desprins?

3) Să se calculeze perioada oscilaţiilor mici ale sistemului disc - corp.

(Concursul de fizică, Etapa republicană, 1972)

Rezolvare

1) Pentru simplitate, în desenul din figura I.133, am reprezentat numai diametrul AB al discului. Cînd vom scrie însă momentul de inerţie vom ţine seama că avem de a face cu un disc şi nu cu o bară.

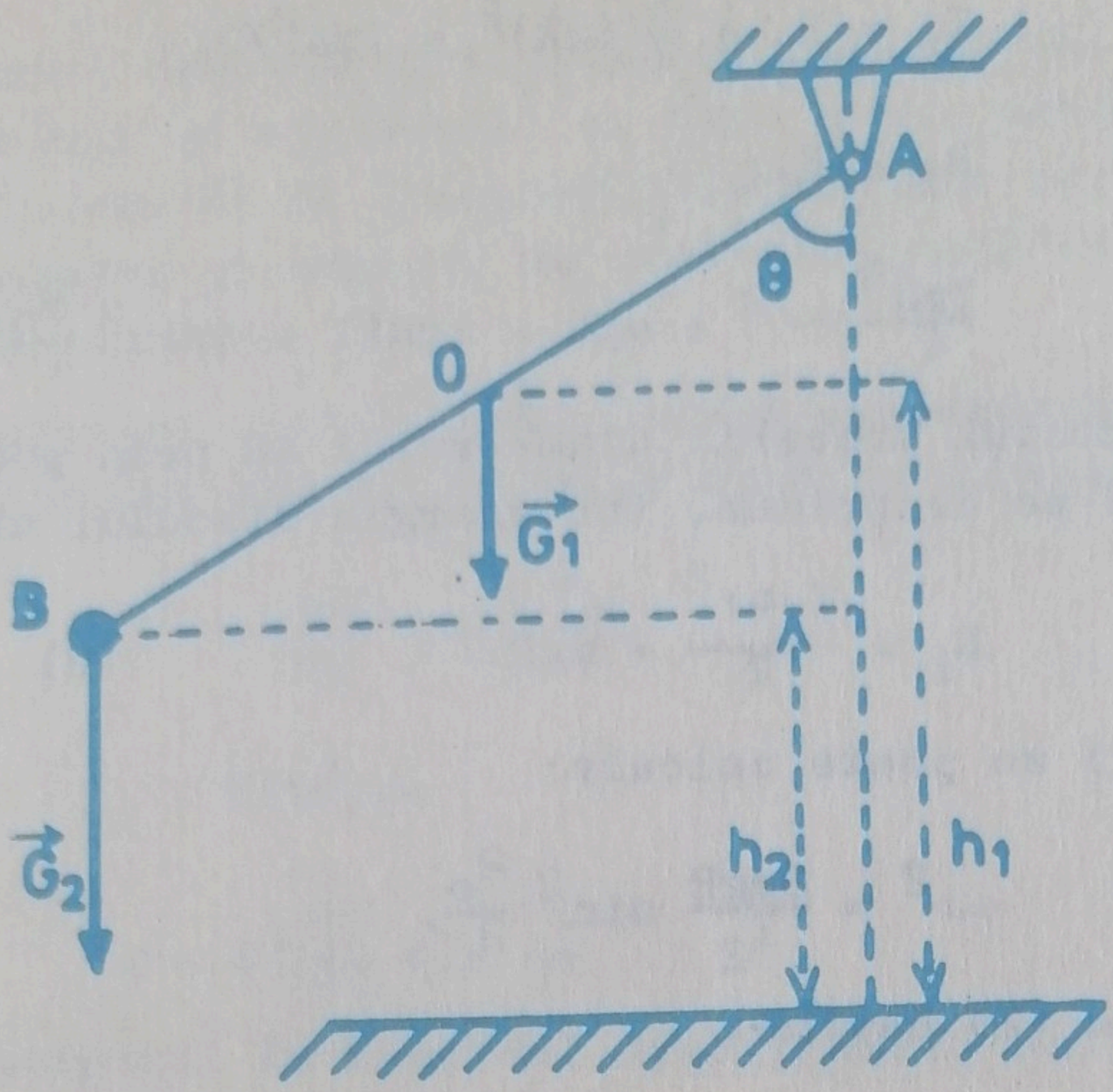


Figura I.133

In poziţia iniţială sistemul are numai energie potenţială gravitaţională. Pentru calculul acesteia să considerăm drept nivel de referinţă suprafaţa solului aflată la distanţa 2R faţă de A.

$$E_i = m_1 g h_1 + m_2 g h_2;$$

$$h_1 = 2R - R\cos\theta_o = r(2 - \cos\theta_o) = R(1+2\sin^2 \frac{\theta_o}{2})$$

$$h_2 = 2R - 2R\cos\theta_o = 2R(1 - \cos\theta_o) = 4R\sin^2 \frac{\theta_o}{2};$$

$$E_i = mgR(1 + 2\sin^2 \frac{\theta_o}{2}) + \frac{m}{2} 4gR\sin^2 \frac{\theta_o}{2};$$

$$E_i = mgR(1 + 4\sin^2 \frac{\theta_o}{2}).$$

In momentul trecerii prin poziţia de echilibru o parte din energia E_i s-a transformat în energie cinetică a mişcării de rotaţie, iar restul a rămas ca energie potenţială gravitaţională.

$$E_f = \frac{I_2\omega^2}{2} + mgR;$$

$$I_2 = I_1 + \frac{m}{2}(2R)^2 = 7mR^2/2;$$

$$E_i = E_f;$$

$$\frac{7mR^2}{4}\omega^2 + mgR = mgR(1 + 4\sin^2\frac{\theta_o}{2}). \qquad (1)$$

In momentul trecerii diametrului AB prin poziţia verticală corpul m/2 se desprinde, iar energia discului are valoarea:

$$E_1 = \frac{I_1\omega^2}{2} + mgR. \qquad (2)$$

Din (1) se poate calcula:

$$\omega^2 = \frac{8mgR}{I_2}\sin^2\frac{\theta_o}{2}.$$

Relaţia (2) devine:

$$E_1 = \frac{I_1}{I_2}4mgR\sin^2\frac{\theta_o}{2} + mgR.$$

Discul se va deplasa de cealaltă parte a poziţiei de echilibru, pînă cînd diametrul AB va forma cu verticala un unghi θ. In poziţia finală întreaga energie a sistemului este numai energie potenţială gravitaţională.

$$E_2 = mgh' = mgR(2 - \cos\theta);$$

$$E_2 = mgR(1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2});$$

$$E_1 = E_2;$$

$$\frac{I_1}{I_2}4mgR\sin^2\frac{\theta_o}{2} + mgR = mgR(1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2});$$

$$\frac{I_1}{I_2}2\sin^2\frac{\theta_o}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2};$$

$$\frac{I_1}{I_2} = 3/7;$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{6}{7}}\sin\frac{\theta_o}{2}; \quad \theta < \theta_o.$$

In momentul desprinderii corpului din punctul B scade momentul de inerţie al sistemului şi deci scade energia cinetică de rotaţie a sistemului la trecerea prin poziţia de echilibru. In mod corespunzător şi unghiul de depărtare faţă de poziţia de echilibru va fi mai mic.

2) Am calculat viteza unghiulară a sistemului în momentul desprinderii corpului din B, ca fiind dată de expresia:

$$\omega^2 = \frac{8mgR}{I_2} \sin^2 \frac{\theta_o}{2};$$

$$I_2 = 7mR^2/2;$$

$$\omega = 4\sqrt{\frac{g}{7R}} \sin \frac{\theta_o}{2}.$$

Viteza corpului în momentul desprinderii sale este egală cu viteza tangenţială a punctului B:

$$v = 2r\omega;$$

$$v = 8\sqrt{\frac{gR}{7}} \sin \frac{\theta_o}{2}.$$

3) Perioada unui pendul fizic este dată de expresia:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}},$$

în care:

I = momentul de inerţie al sistemului în raport cu axa de rotaţie a pendulului;

M = masa totală a sistemului;

L = distanţa de la centrul de greutate al sistemului pînă la punctul de suspensie.

Considerînd că masa discului este $m_1 = m$, fiind concentrată în punctul O, iar masa corpului $m_2 = m/2$ este concentrată în B, atunci centrul de greutate al sistemului se află în punctul C, situat între O şi B la distanţa d faţă de punctul O.

$$d = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} = R/3;$$

$$L = R + \frac{R}{3} = 4R/3;\ M = 3m/2;\ I = 7mR^2/2;$$

$$T = \widetilde{\Pi}\sqrt{\frac{7R}{g}}.$$

Problema 84

Un vas de sticlă cu baza un pătrat de latură L, conţinînd apă pînă la înălţimea h, se înclină în jurul unei laturi a bazei cu un unghi θ. Se cer:

1) înălţimea coloanei de apă din vasul înclinat;
2) pentru ce înclinaţie nivelul apei este situat la înălţimea maximă;
3) ecuaţia traiectoriei punctului reprezentînd centrul suprafeţei libere a apei din vas.

Rezolvare

1) Din desenul prezentat în figura I.134, rezultă:

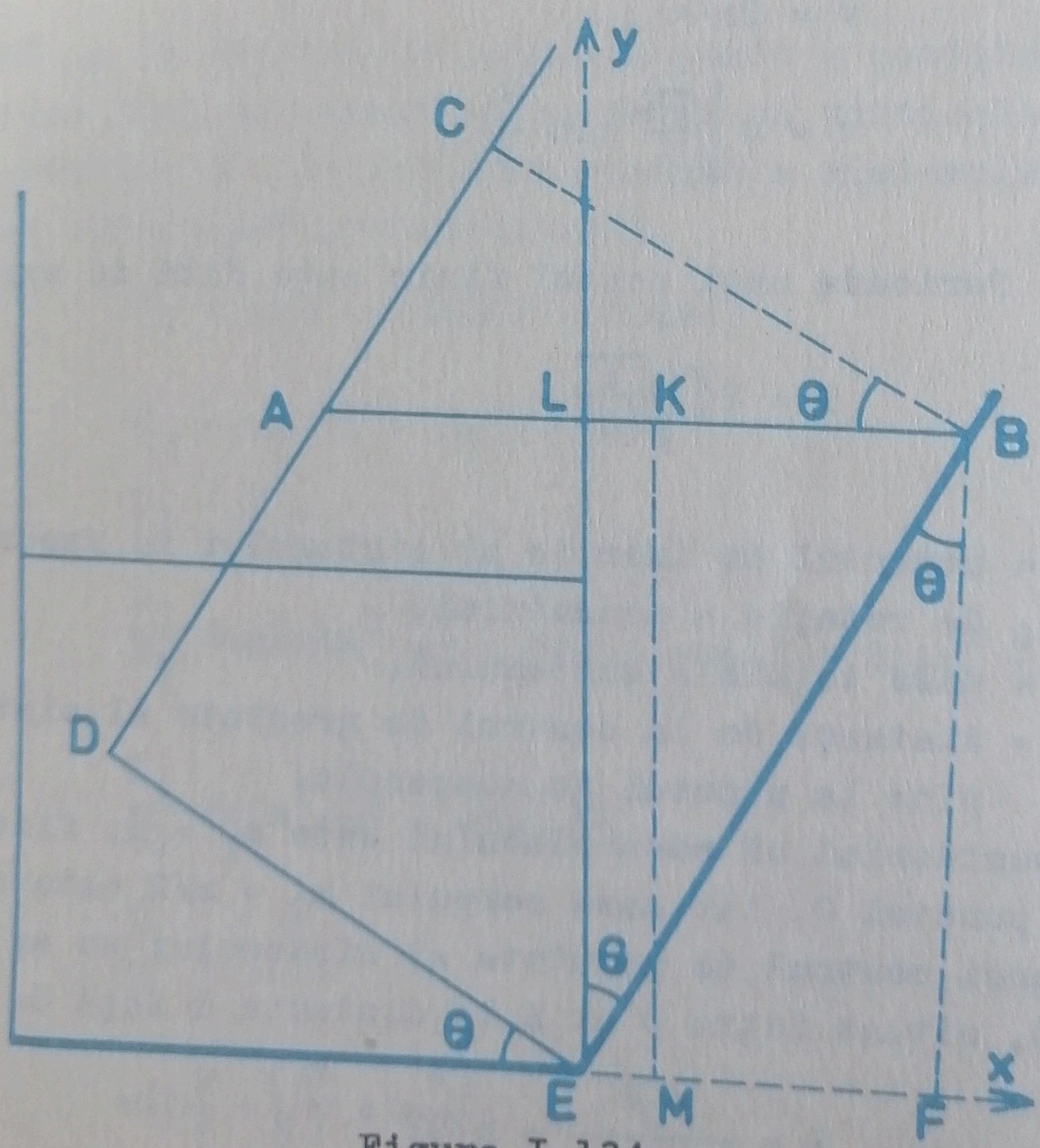


Figura I.134

$$\cos\Theta = \frac{BF}{BE};$$

$$BF = BE\cos\Theta. \qquad (1)$$

Cînd vasul nu este înclinat, volumul apei din vas se poate calcula astfel:

$$V_1 = L^2h.$$

Cînd vasul este înclinat cu unghiul Θ volumul apei din vas se poate calcula astfel:

$$V_2 = L^2BE - \frac{L^2AC}{2};$$

$$AC = L\ tg\Theta;$$

$$V_2 = L^2BE - \frac{L^3tg\Theta}{2};$$

$$V_1 = V_2;$$

$$L^2h = L^2BE - \frac{L^3tg\Theta}{2};$$

$$BE = h + \frac{L}{2}\ tg\Theta;$$

$$BF = H;$$

$$H = h\cos\Theta + \frac{L}{2}\sin\Theta. \qquad (2)$$

2) Calculînd prima derivată a lui H în raport cu Θ, rezultă:

$$\frac{dH}{d\Theta} = -h\sin\Theta + \frac{L}{2}\cos\Theta = o;$$

$$tg\Theta = L/2h;$$

$$\sin\Theta = \frac{tg\Theta}{\sqrt{1 + tg^2\Theta}};\quad \cos\Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\Theta}};$$

$$\sin\Theta = \frac{L}{\sqrt{4h^2 + L^2}};\quad \cos\Theta = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + L^2}};$$

$$H_{max} = \frac{\sqrt{4h^2 + L^2}}{2}.$$

3) Coordonatele punctului K de la mijlocul suprafeţei libere a lichidului sînt (x; y):

$$x = EM = LK;$$

$$y = KM = BF;$$

$$LK = LB - KB;$$

$$x = BE \sin\theta - \frac{AB}{2};$$

$$\cos\theta = \frac{BF}{BE};\ BE = \frac{BF}{\cos\theta} = \frac{H}{\cos\theta} = h + \frac{L}{2} tg\theta;$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AB};\ AB = \frac{BC}{\cos\theta} = \frac{L}{\cos\theta};$$

$$x = (h + \frac{L}{2} tg\theta) \sin\theta - \frac{L}{2} \frac{1}{\cos\theta};$$

$$x = h \sin\theta + \frac{L}{2}(\sin^2\theta - 1)\frac{1}{\cos\theta};$$

$$x = h \sin\theta - \frac{L}{2} \cos\theta;$$

$$y = h \cos\theta + \frac{L}{2} \sin\theta.$$

Cele două ecuaţii de mai sus reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului ce reprezintă mijlocul suprafeţei libere a lichidului din vas.

Ecuaţia traiectoriei se obţine prin eliminarea parametrului θ. Ridicăm la pătrat cele două ecuaţii şi apoi le adunăm. Ecuaţia traiectoriei este ecuaţia unui cerc:

$$x^2 + y^2 = h^2 + L^2/4.$$

Problema 85

De la înălţimea h a unui pod peste un rîu a cărui apă curge cu viteza v cade liber un corp cu densitatea $\rho < \rho_0$. Neglijînd orice fel de rezistenţă la înaintare, să se determine:

1) ecuaţia traiectoriei corpului în apă;
2) adîncimea la care pătrunde corpul în apă;
3) locul şi unghiul sub care corpul va ieşi din apă.

Rezolvare

1) Forma traiectoriei corpului în raport cu solul este prezentată în desenul din figura I.135.

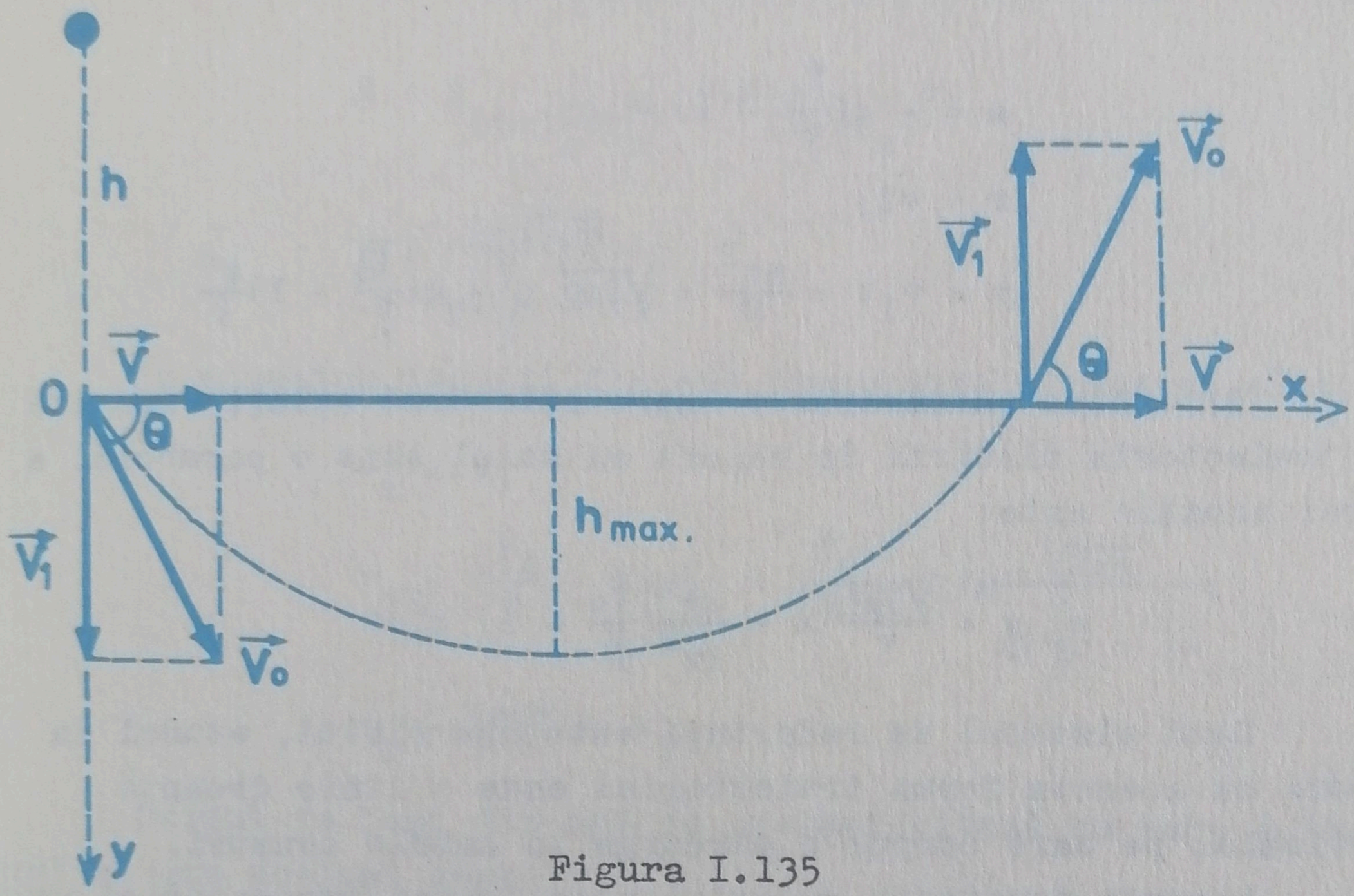


Figura I.135

Viteza corpului în momentul pătrunderii în apă este:

$$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

După pătrunderea în apă viteza corpului, în raport cu solul, este:

$$\vec{v}_o = \vec{v} + \vec{v}_1;$$

$$v_o = \sqrt{v^2 + v_1^2} = \sqrt{v^2 + 2gh}.$$

Unghiul pe care vectorul $\vec{v}_o$ îl formează cu suprafaţa apei este dat de expresia:

$$tg\theta = v_1/v = \frac{\sqrt{2gh}}{v}.$$

Deoarece densitatea corpului este mai mică decît densitatea apei, rezultă că forţa arhimedică este mai mare decît greutatea corpului.

In acest caz mişcarea corpului se studiază asemănător cu aruncraea unui corp sub un unghi θ în cîmp gravitaţional. Mişcarea se face într-un cîmp de forţe cu acceleraţia orientată pe verticală în sus.

$$a = -g\left(\frac{\rho_o}{\rho} - 1\right) < o;$$

$$x = vt;$$

$$y = v_1 t + \frac{at^2}{2} = \sqrt{2gh}\, t - g\left(\frac{\rho_o}{\rho} - 1\right)\frac{t^2}{2}.$$

Eliminînd parametrul t între cele două ecuaţii rezultă că traiectoria mişcării în raport cu solul este o parabolă, a cărei ecuaţie este:

$$y = \frac{\sqrt{2gh}}{v} x - \frac{g}{2v^2}\left(\frac{\rho_o}{\rho} - 1\right) x^2.$$

Dacă sistemul de referinţă este apa rîului, atunci în raport cu aceasta forma traiectoriei este o linie dreaptă verticală, pe care corpul o parcurge în ambele sensuri.

Aceasta dovedeşte relativitatea formei traiectoriei unui corp.

2) $$v_x = v;\ v_y = v_1 + at;\ a = -g\left(\frac{\rho_o}{\rho} - 1\right);$$

$$v_y = \sqrt{2gh} - g\left(\frac{\rho_o}{\rho} - 1\right)t.$$

In punctul corespunzător adîncimii maxime $v_y = o$. Rezultă:

$$o = \sqrt{2gh} - g\left(\frac{\rho_o}{\rho} - 1\right)t_c;$$

t_c = timpul de coborîre în apă;

$$t_c = \frac{\sqrt{2gh}}{g\left(\frac{\rho_o}{\rho} - 1\right)};$$

$$h_{max} = y_{(t=t_c)} = -v_1^2/2a = \frac{2gh}{2g(\frac{\rho_o}{\rho} - 1)};$$

$$h_{max} = \frac{h}{\frac{\rho_o}{\rho} - 1}.$$

3) Coordonata punctului de ieşire din apă este:

$$X = x_{(t=t_c+t_u)} = x_{(t=2t_c)};$$

$$X = \frac{2v\sqrt{2gh}}{g(\frac{\rho_o}{\rho} - 1)}.$$

In momentul ieşirii din apă componentele vitezei sînt:

$$v_x = v;$$

$$v_y = (\frac{\rho_o}{\rho} - 1)gt_u = (\frac{\rho_o}{\rho} - 1)g\frac{\sqrt{2gh}}{g(\frac{\rho_o}{\rho} - 1)};$$

$$v_y = \sqrt{2gh} = v_1.$$

Corpul va ieşi din apă cu aceeaşi viteză cu care a intrat şi sub acelaşi unghi.

Problema 86

Intr-un tub de sticlă în formă de U cu secţiunea constantă, avînd porţiunea orizontală cu lungimea L, se toarnă mercur pînă la un anumit nivel. Cele două capete ale tubului se închid, iar porţiunile libere se videază. In poziţie verticală, tubul este aşezat la bordul unui automobil, în planul longitudinal al acestuia. Poate fi folosit acest dispozitiv pentru determinarea acceleraţiei maşinii?

Rezolvare

Dispozitivul este prezentat în desenul din figura I.136.

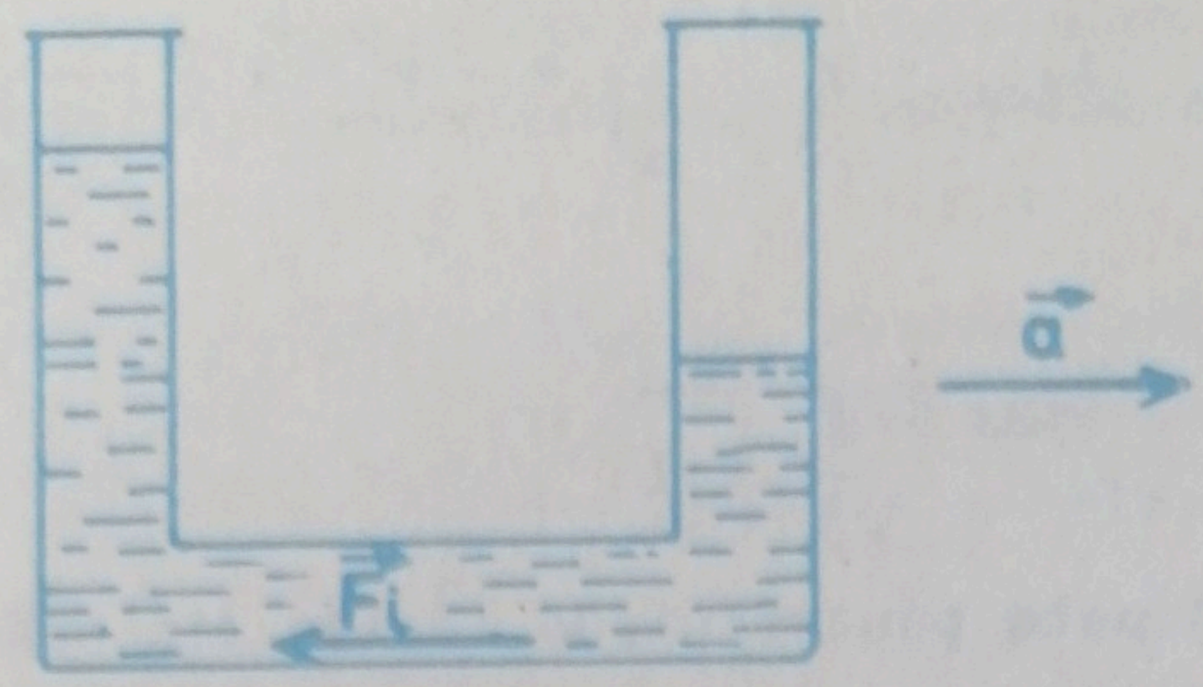


Figura I.136

Cît timp mişcarea maşinii este rectilinie şi uniformă lichidul este la acelaşi nivel în ambele ramuri. Dacă mişcarea devine variată, apariţia unei forţe de inerţie determină denivelarea mercurului din tub.

Pentru o mişcare rectilinie uniform variată, în momentul stabilirii echilibrului există relaţia:

$$\rho gh = ma/S,$$

adică presiunea hidrostatică a coloanei de mercur reprezentînd diferenţa de nivel din cele două ramuri ale tubului, este echilibrată de presiunea exercitată de forţa de inerţie a masei de mercur din porţiunea orozontală a tubului.

$$\rho gh = LSa/S;\ gh = aL;$$

$$a = \frac{g}{L} h;\ K = g/L;$$

$$a = Kh.$$

Cunoscînd constanta dispozitivului (K) şi citind denivelarea mercurului din vas se poate determina acceleraţia automobilului. Dispozitivul poate fi etalonat direct în unităţi de acceleraţie.

Problema 87

Apa dintr-un rezervor cilindric cu aria secţiunii S şi înălţimea H curge printr-un orificiu cu aria secţiunii s, de la baza cilindrului.

1) Să se scrie ecuaţia vitezei apei prin orificiul de scurgere şi prin secţiunea transversală a rezervorului;

2) Să se determine relaţia dintre acceleraţii în cele două secţiuni.

3) In cît timp se va goli rezervorul?

4) Dacă apa se scurge într-un recipient cu volumul V, în cît timp se va umple acesta?

Rezolvare

1) Desenul din figura I.137 prezintă o secţiune longitudinală a rezervorului.

Cantitatea elementară de apă care se scurge în intervalul elementar de timp dt, prin secţiunea îngustă se scrie:

$$dm = \rho s v dt,$$

unde v este viteza apei prin orificiul de scurgere, la momentul t, cînd înălţimea coloanei de apă din vas este h.

$$v = \sqrt{2gh} \text{ (ecuaţia lui Torricelli)}$$

$$dm = \rho s \sqrt{2g}\sqrt{h}\, dt.$$

In acelaşi interval de timp, prin secţiunea largă a conductei (rezervorului) trebuie să se scurgă o cantitate egală de apă:

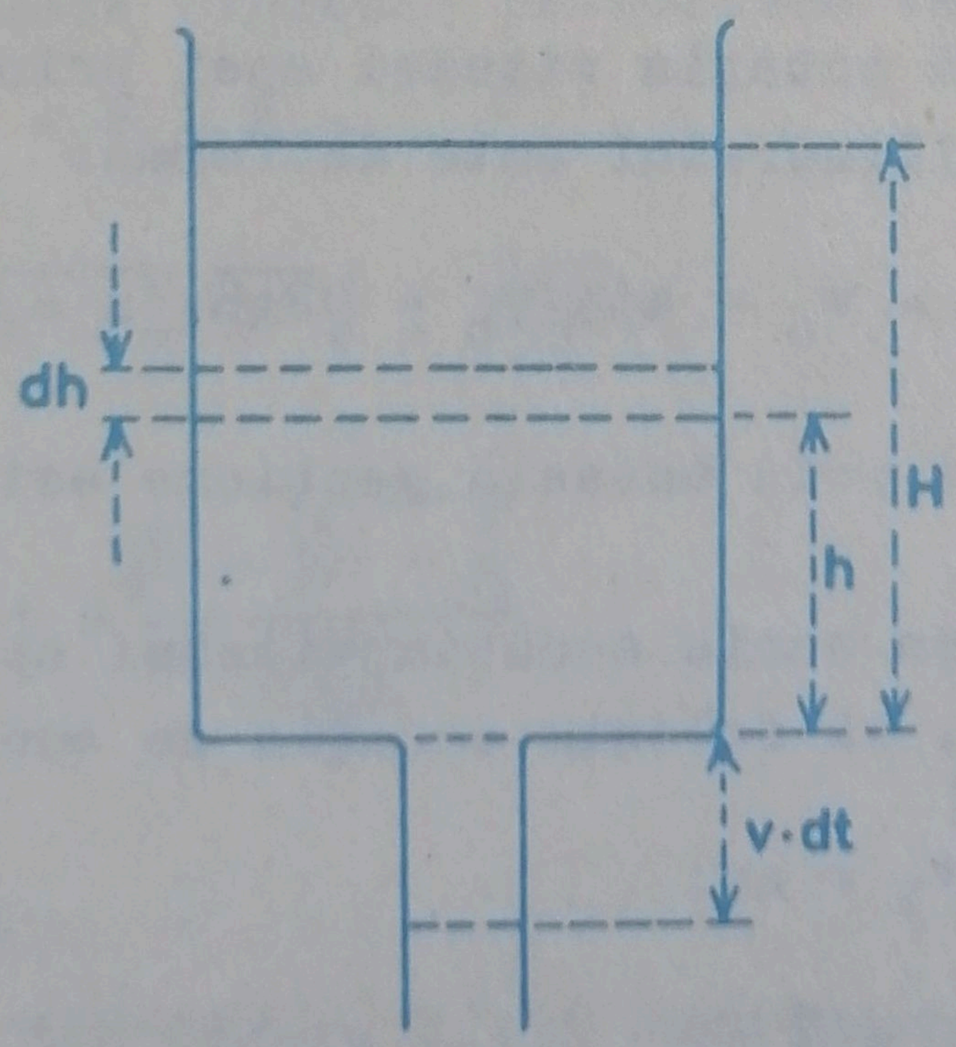


Figura I.137

$$dm = \rho S\, dh.$$

Egalînd cele două expresii scrise pentru dm, rezultă:

$$s\sqrt{2g}\sqrt{h}\, dt = - S\, dh;$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = - \frac{s}{S}\sqrt{2g}\, dt.$$

Prin integrare, rezultă:

$$2\sqrt{h} = - \frac{s}{S}\sqrt{2g}\, t + C. \qquad (1)$$

Determinarea constantei de integrare C se face folosind condiţiile iniţiale:

$$t = o;\ h = H;$$

$$C = 2\sqrt{H}.$$

Ecuaţia (1) devine:

$$\sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{s\sqrt{2g}}{2S}\, t.$$

$$v = \sqrt{2g}\sqrt{h} = \sqrt{2g}\left(\sqrt{H} - \frac{s\sqrt{2g}}{2S}\, t\right);$$

$$v = \sqrt{2gH} - \frac{s}{S}\, g\, t.$$

Se observă că ecuaţia vitezei apei prin secţiunea orificiului de la baza cilindrului este de forma:

$$v = v_o + at;\ v_o = \sqrt{2gH};\ a = - \frac{s}{S}g.$$

Mişcarea apei prin această secţiune este deci o mişcare uniform încetinită.

Pentru a putea scrie ecuaţia vitezei apei prin secţiunea largă a cilindrului, să folosim ecuaţia de continuitate:

$$Sv_1 = sv;$$

$$v_1 = \frac{s}{S}\, v;$$

$$v_1 = \frac{s}{S} 2gH - \frac{s^2}{S^2} gt;$$

$$v_1 = v_{o1} + a_1 t;\ v_{o1} = \frac{s}{S}\sqrt{2gH};\ a_1 = -\frac{s^2}{S^2} g.$$

2) $a/a_1 = S/s.$

3) In momentul golirii complete a rezervorului viteza apei prin secţiunea îngustă este zero. Rezultă:

$$o = \sqrt{2gH} - \frac{s}{S} g t_{golire};$$

$$t_{golire} = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H}{g}};$$

4) Dacă apa din rezervor se scurge într-un recipient cu volumul V, atunci:

$$Sh_1 = V;$$

$h_1 = V/S$ = distanţa pe care coboară nivelul apei din rezervor în momentul umplerii recipientului. In acest moment nivelul apei din rezervor este:

$$h = H - h_1.$$

Stim că: $\sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{s\sqrt{2g}}{2S} t.$

Dacă în această expresie introducem valoarea:

$$h = H - h_1,$$

rezultă:

$$\sqrt{H - \frac{V}{S}} = H - \frac{s\sqrt{2g}}{2S} t;$$

$$t = \frac{\sqrt{H} - \sqrt{H - \frac{V}{S}}}{\frac{s\sqrt{2g}}{2S}}.$$

Problema 88

In desenul din figura I.138 este prezentat un punct material cu masa m ataşat la capătul unui fir imponderabil şi

inextensibil, sprijinindu-se fără frecare pe suprafaţa orizontală a unui suport. Celălalt capăt al firului este trecut printr-un orificiu practicat în suport, acţionîndu-se asupra lui pe verticală în jos. Cunoscînd v_o şi r_o să se determine:

1) tensiunea din fir în momentul în care porţiunea orizontală a firului are lungimea $r < r_o$;

2) lucrul mecanic efectuat pentru scurtarea lungimii porţiunii orizontale a firului, de la r_o la r;

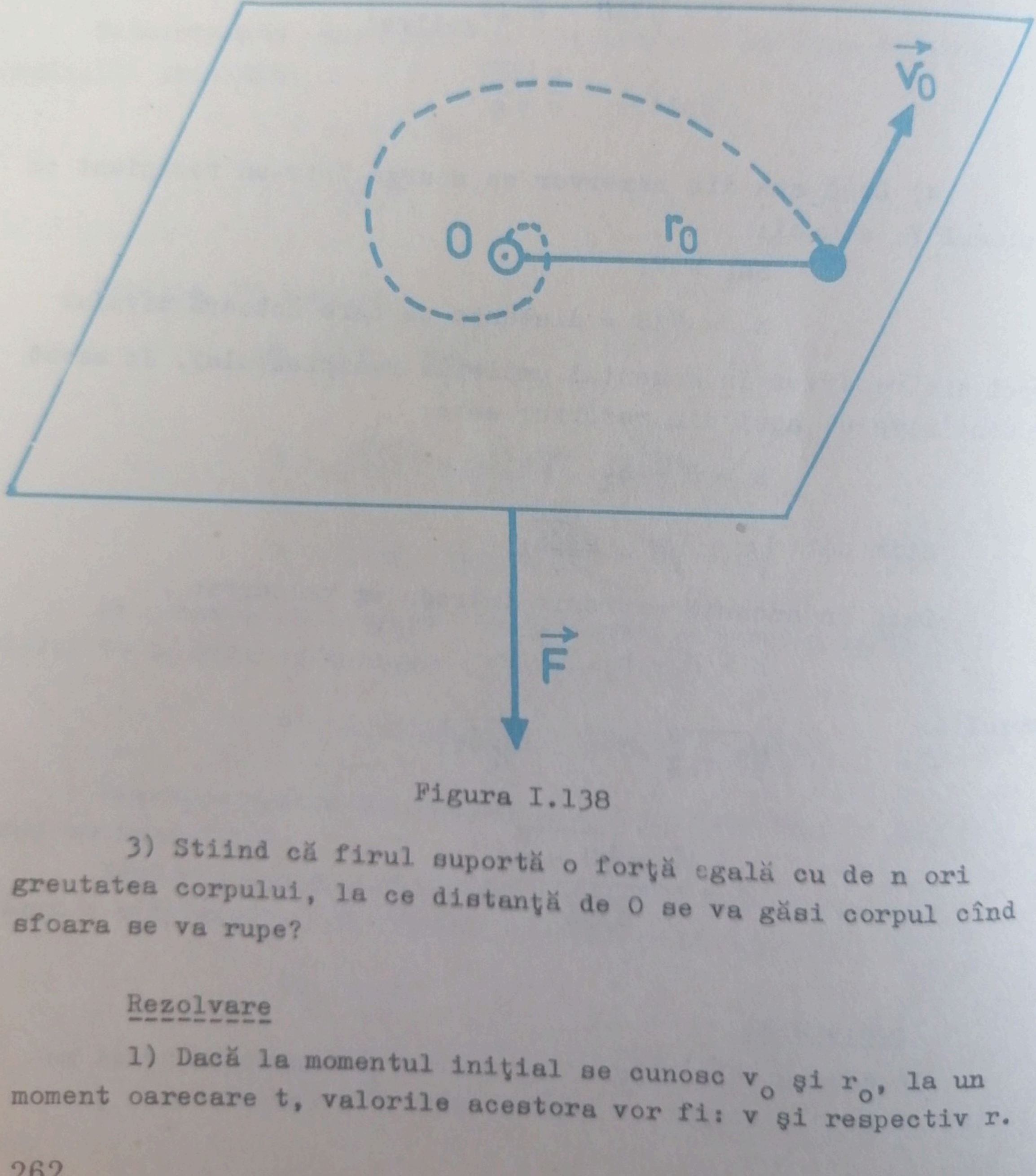


Figura I.138

3) Ştiind că firul suportă o forţă egală cu de n ori greutatea corpului, la ce distanţă de O se va găsi corpul cînd sfoara se va rupe?

Rezolvare

1) Dacă la momentul iniţial se cunosc v_o şi r_o, la un moment oarecare t, valorile acestora vor fi: v şi respectiv r.

Forţa exercitată asupra punctului material prin intermediul firului (tensiunea din fir) este o forţă radială. Ca urmare momentul acestei forţe în raport cu punctul O este nul. In consecinţă, momentul cinetic al punctului material se conservă:

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M};\ \vec{M} = o;\ \vec{L}_o = \vec{L};\ L_o = L;$$

$$mr_o v_o = mrv;$$

$$r_o v_o = rv. \qquad (1)$$

Tensiunea din fir îndeplineşte, în orice moment, rolul unei forţe centripete, adică:

$$T = F_{cp} = \frac{mv^2}{r}. \qquad (2)$$

Rezultă:

$$T = \frac{m r_o^2 v_o^2}{r^3}.$$

2) Din teorema variaţiei energiei cinetice, rezultă:

$$L = \Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2};$$

$$L = \frac{mv_o^2}{2}\left(\frac{r_o^2}{r^2} - 1\right).$$

3) $$T_{max} = nmg;$$

$$T_{max} = \frac{mr_o^2 v_o^2}{R\ R^2};\quad T_{max} = \frac{mr_o^2 v_o^2}{R^3};$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{r_o^2 v_o^2}{ng}}.$$

Problema 89

Un şofer oprit de un miliţian pentru că nu ar fi respectat viteza legală de 6o km/h susţine că ar fi circulat reg lementar. In maşină miliţianul a găsit un vas cu diametrul de 4o

cm, înalt de 5o cm, cu apă pînă la jumătate. Punctul cel mai înalt al peretelui interior udat era la 22 cm deasupra apei. După frînare maşina a parcurs 15 m pînă la oprire. Cine a avut dreptate? Se va considera $g = 1o\ m/s^2$.

(Concursul de fizică, Etapa finală, 1969)

Rezolvare

Se ştie că suprafaţa liberă a unui lichid în repaus este plană şi orizontală. In cazul problemei pe care o rezolvăm suprafaţa liberă a apei nu va mai fi orizontală, ci va fi un plan cu înclinaţia θ faţă de orizontală.

Rezultanta forţei de greutate şi a forţei de inerţie trebuie să fie perpendiculară pe suprafaţa liberă a apei din vas, aşa cum indică desenul din figura I.139.

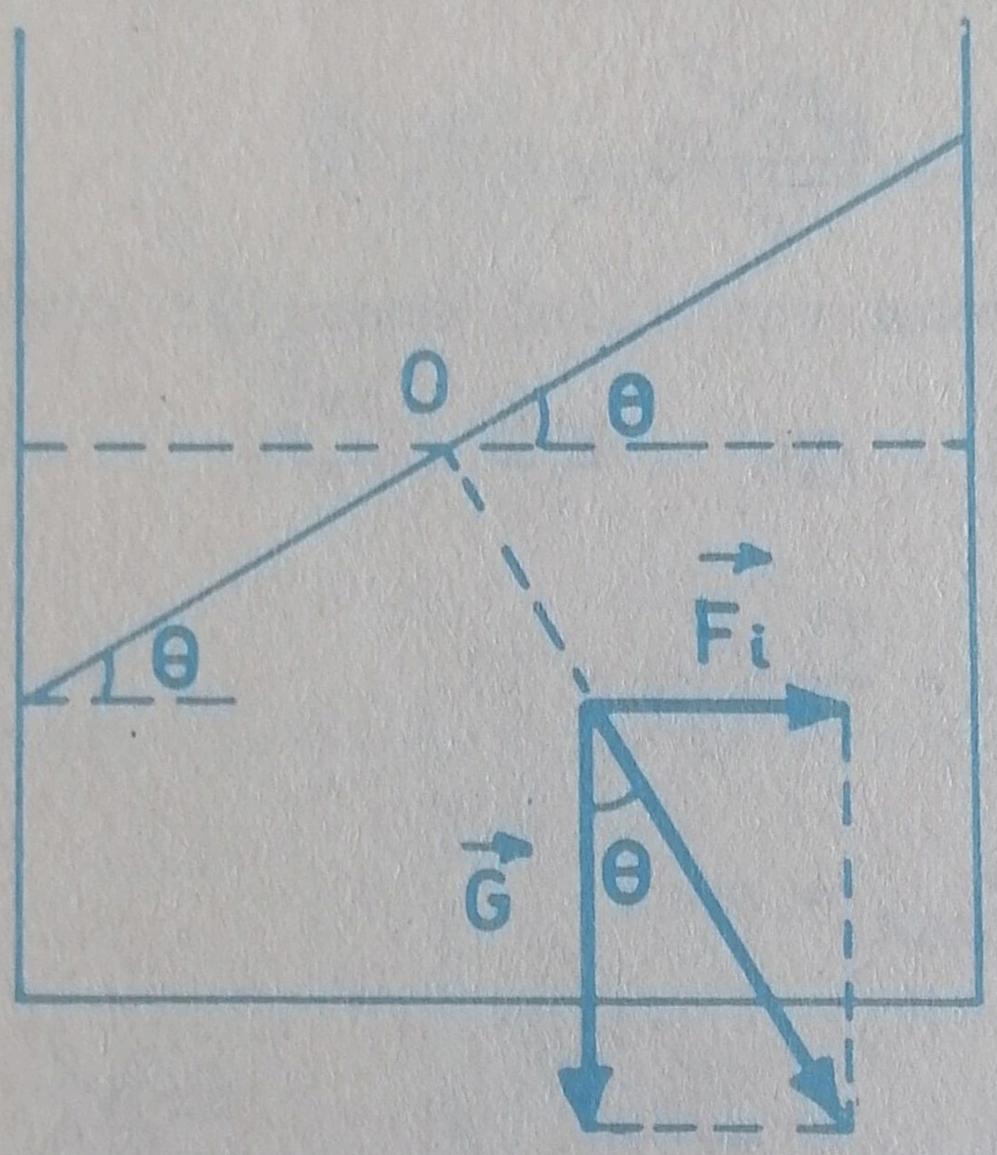


Figura I.139

$$tg\theta = F_i/G = ma/mg = a/g;$$

$$tg\theta = AB/OB;$$

$$a = \frac{AB}{OB}\, g = 11\ m/s^2;$$

$$s_{max} = v_o^2/2a;\ v_o = \sqrt{2as_{max}} = 18,1\ m/s;$$

$$v_o = 65,11\ km/h.$$

Miliţianul a avut dreptate.

Problema 9o

Pe suprafaţa apei dintr-un vas pluteşte un cub de lemn cu latura L şi densitatea $\rho < \rho_o$. Cum se va modifica porţiunea scufundată în apă, în următoarele situaţii:

1) vasul este aşezat într-un ascensor care urcă uniform accelerat cu acceleraţia $\vec{a}$;

2) peste apa din vas se toarnă ulei.

Rezolvare

1) Dacă vasul este în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă, condiţia de echilibru a cubului este dată de relaţia:

$$m_o g = mg;\ m_o = m;\ \rho_o L^2 h = \rho L^3;$$

$$h = \frac{\rho}{\rho_o} L. \qquad (1)$$

Dacă vasul urcă pe verticală uniform accelerat apare o forţă de inerţie orientată la fel cu greutatea şi deci cubul se va scufunda mai mult.

$$m_o g = m(g + a);\ \rho_o L^2 h_1 g = \rho L^3 (g + a);$$

$$h_1 = \frac{\rho}{\rho_o}(1 + \frac{a}{g})L. \qquad (2)$$

2) Adăugînd ulei peste apă, apare o forţă arhimedică suplimentară, care va obliga cubul să se ridice, în raport cu nivelul apei din vas.

Să considerăm pentru început cazul în care stratul de ulei este tangent la faţa superioară a cubului. Desenul din figura I.14o prezintă această situaţie, cubul fiind complet scufundat: o parte în apă şi restul în ulei.

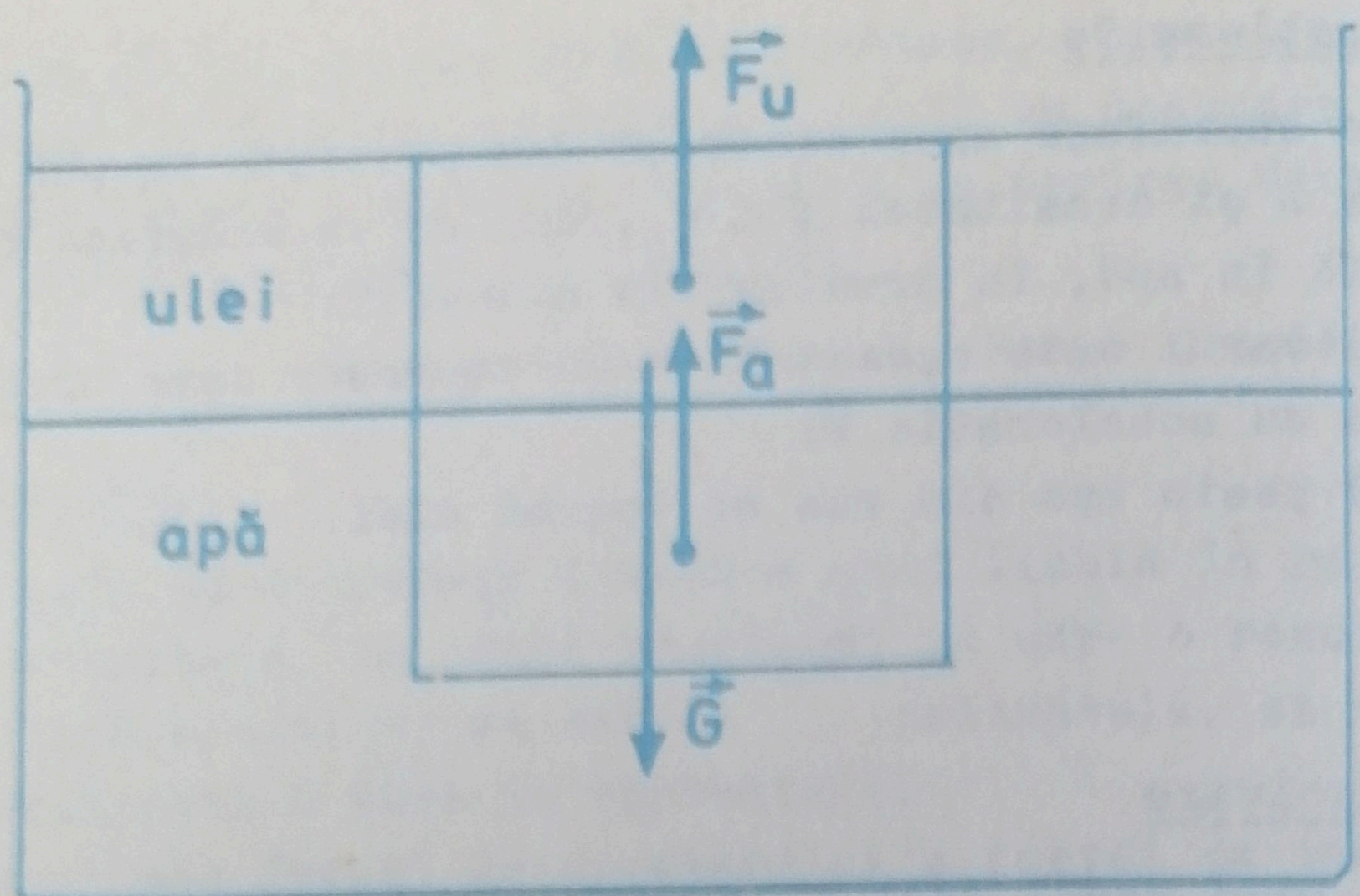


Figura I.14o

$$mg = m_a g + m_u g;$$

$$\rho L^3 = \rho_o L^2 h_2 + \rho_u L^2 (L - h_2);$$

$$h_2 = \frac{\rho - \rho_u}{\rho_o - \rho_u} L.$$

Dacă se adaugă în continuare ulei, aşa încît deasupra cubului să se formeze un strat de ulei de grosime H, deoarece presiunea se exercită atît pe faţa superioară, cît şi pe faţa inferioară a cubului, acesta nu se va mai ridica, stabilindu-se la adîncimea calculată anterior h_2.

Problema 91

Intr-un vas cu apă pluteşte un bloc de gheaţă. Cum se modifică nivelul apei din vas din cauza topirii gheţii, dacă în blocul de gheaţă a fost inclusă: o bucată de lemn; o piatră; o bulă de aer.

(Concursul de fizică, Etapa republicană, 1971)

Rezolvare

In desenul din figura I.14l este prezentat blocul de gheaţă, în care nu este inclus nici un corp străin.

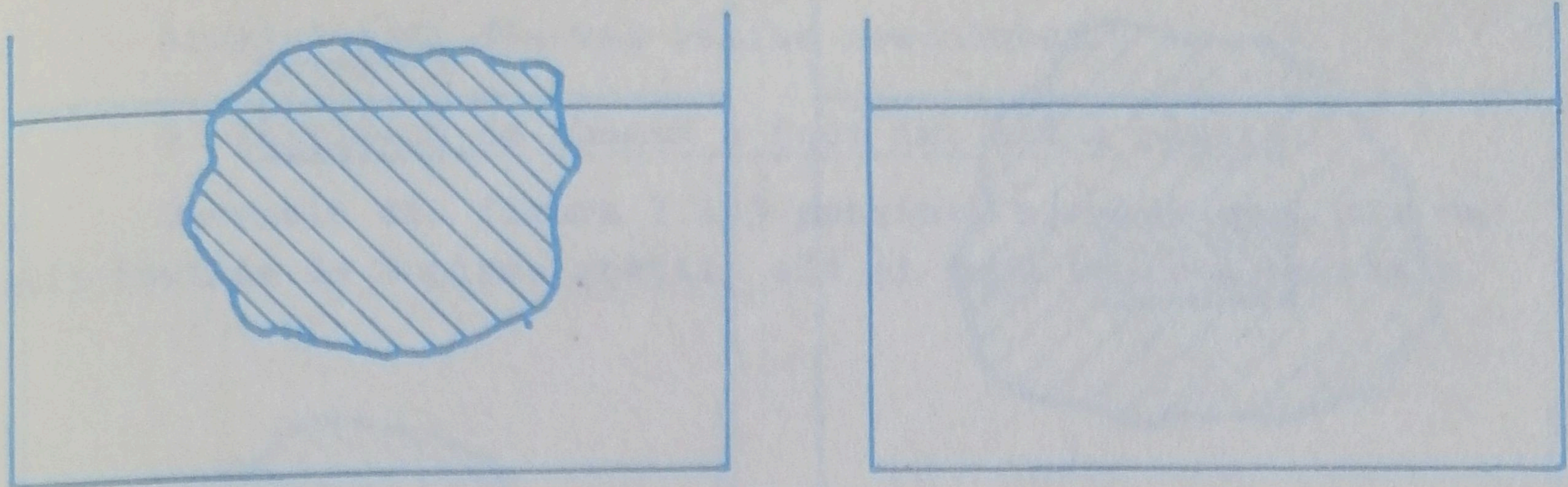


Figura I.141

Notaţii:

m_g = masa întregului bloc de gheaţă;

m_{ad} = masa de apă dezlocuită de porţiunea din blocul de gheaţă, scufundată în apă;

m_{ar} = masa de apă rezultată din topirea gheţii;

ρ_a = densitatea apei; ρ_g = densitatea gheţii.

Din condiţia de plutire a blocului de gheaţă, rezultă:

$$m_g g = m_{ad} g;\ m_g = m_{ad};\ \rho_g V_g = \rho_a V_{ad};$$

$$V_{ad} = \rho_g V_g / \rho_a .$$

Din condiţia de conservare a masei, rezultă:

$$m_{ar} = m_g;\ \rho_a V_{ar} = \rho_g V_g;$$

$$V_{ar} = \rho_g V_g / \rho_a;$$

$$V_{ar} = V_{ad}.$$

Volumul de apă rezultat din topirea întregului bloc de gheaţă este egal cu volumul de apă dezlocuit de porţiunea scufundată, înainte de topirea acesteia. Ca urmare nivelul apei din vas rămîne neschimbat.

1) In blocul de gheaţă a fost inclusă o bucată de lemn

Desenele din figura I.142 prezintă nivelul apei din vas înainte de topirea gheţii şi după topirea acesteia.

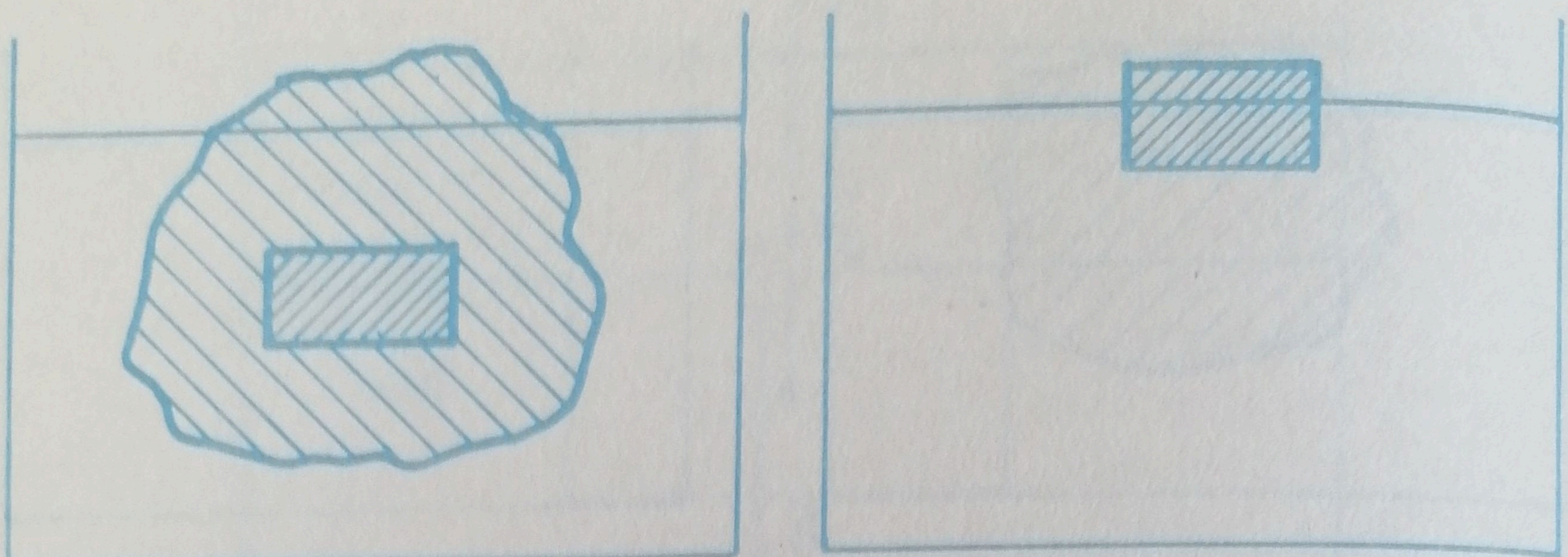


Figura I.142

Din condiţia de plutire rezultă:

$$m_{ad}g = (m_g + m_1)g;$$

m_1 = masa bucăţii de lemn;

$$\rho_a V_{ad} = \rho_g V_g + \rho_1 V_1;$$

$$V_{ad} = \frac{\rho_g V_g}{\rho_a} + \frac{\rho_1 V_1}{\rho_a}.$$

Din condiţia de conservare a masei, rezultă:

$$m_{ar} = m_g;\ \rho_a V_{ar} = \rho_g V_g;\ V_{ar} = \rho_g V_g / \rho_a.$$

După topirea gheţii bucata de lemn va pluti pe suprafaţa apei din vas. Ca urmare:

$$m_1 g = m_{adl} g;$$

m_{adl} = masa de apă dezlocuită de porţiunea din bucata de lemn scufundată în apă;

$$\rho_1 V_1 = \rho_a V_{adl};\ V_{adl} = \rho_1 V_1 / \rho_a.$$

$$V_{final\ rezultat} = V_{ar} + V_{adl};$$

$$V_{fr} = \rho_g V_g / \rho_a + \rho_1 V_1 / \rho a;$$

$$V_{fr} = V_{ad}.$$

Nivelul apei din vas rămîne neschimbat.

2) In blocul de gheaţă a fost inclusă o piatră

Desenele din figura I.143 prezintă nivelul apei din vas atît înainte de topirea gheţii, cît şi după topirea acesteia.

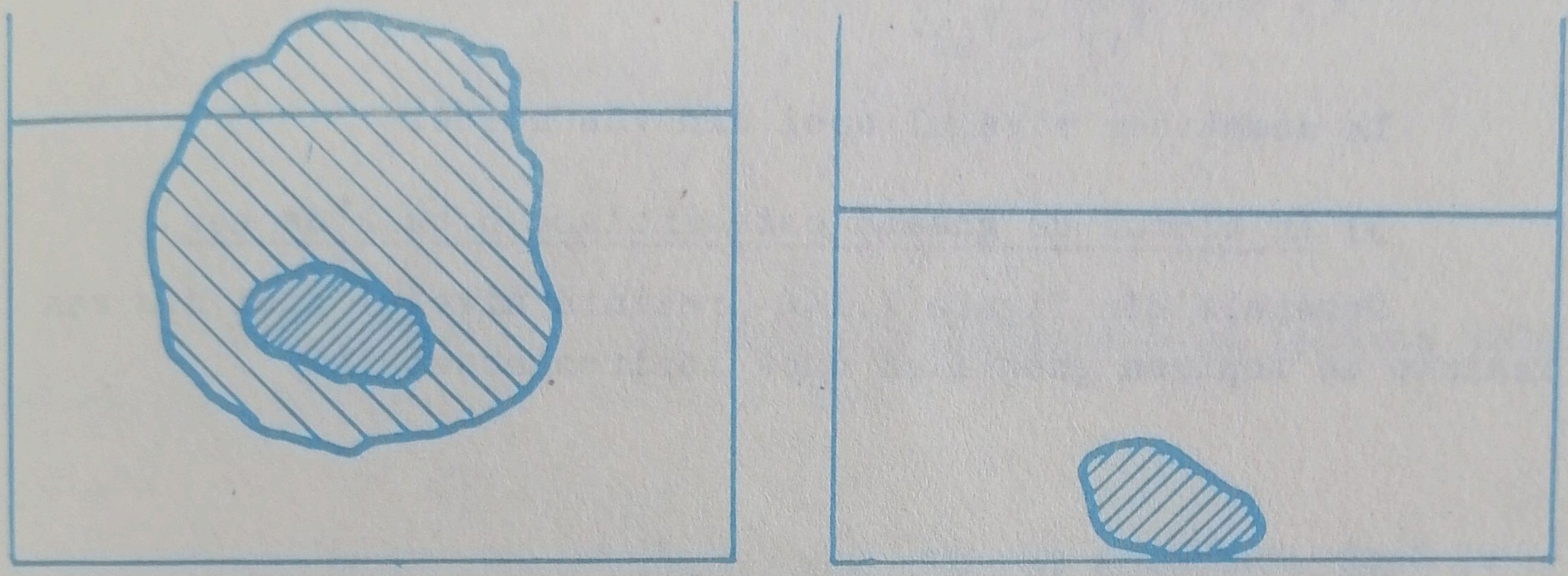


Figura I.143

Din condiţia de plutire rezultă:

$$m_{ad}g = (m_g + m_p)g;$$

m_p = masa pietrei inclusă în blocul de gheaţă;

$$\rho_a V_{ad} = \rho_g V_g + \rho_p V_p;$$

$$V_{ad} = \rho_g V_g / \rho_a + \rho_p V_p / \rho_a.$$

Din condiţia de conservare a masei, rezultă:

$$m_{ar} = m_g; \quad \rho_a V_{ar} = \rho_g V_g; \quad V_{ar} = \rho_g V_g / \rho_a.$$

După topirea gheţii piatra se va scufunda comple în apă.

$$V_{final\ rezultat} = V_p + V_{ar};$$

$$V_{fr} = V_p + \rho_g V_g / \rho_a.$$

Să presupunem că: $V_{fr} < V_{ad}$;

$$V_p + \rho_g V_g / \rho_a < \rho_g V_g / \rho_a + \rho_p V_p / \rho_a;$$

$$\rho_p > \rho_a.$$

Deoarece concluzia este justă însemnează că ipoteza este adevărată. Rezultă:

$$V_{fr} < V_{ad}.$$

In acest caz nivelul apei din vas scade.

3) In blocul de gheaţă este inclusă o bulă de aer

Desenele din figura I.144 prezintă nivelul apei din vas înainte de topirea gheţii şi după topirea acesteia.

Din condiţia de plutire rezultă:

$$m_{ad} g = (m_g + m_{aer}) g;$$

$$\rho_a V_{ad} = \rho_g V_g + \rho_{aer} V_{aer};$$

$$V_{ad} = \rho_g V_g / \rho_a + \rho_{aer} V_{aer} / \rho_a.$$

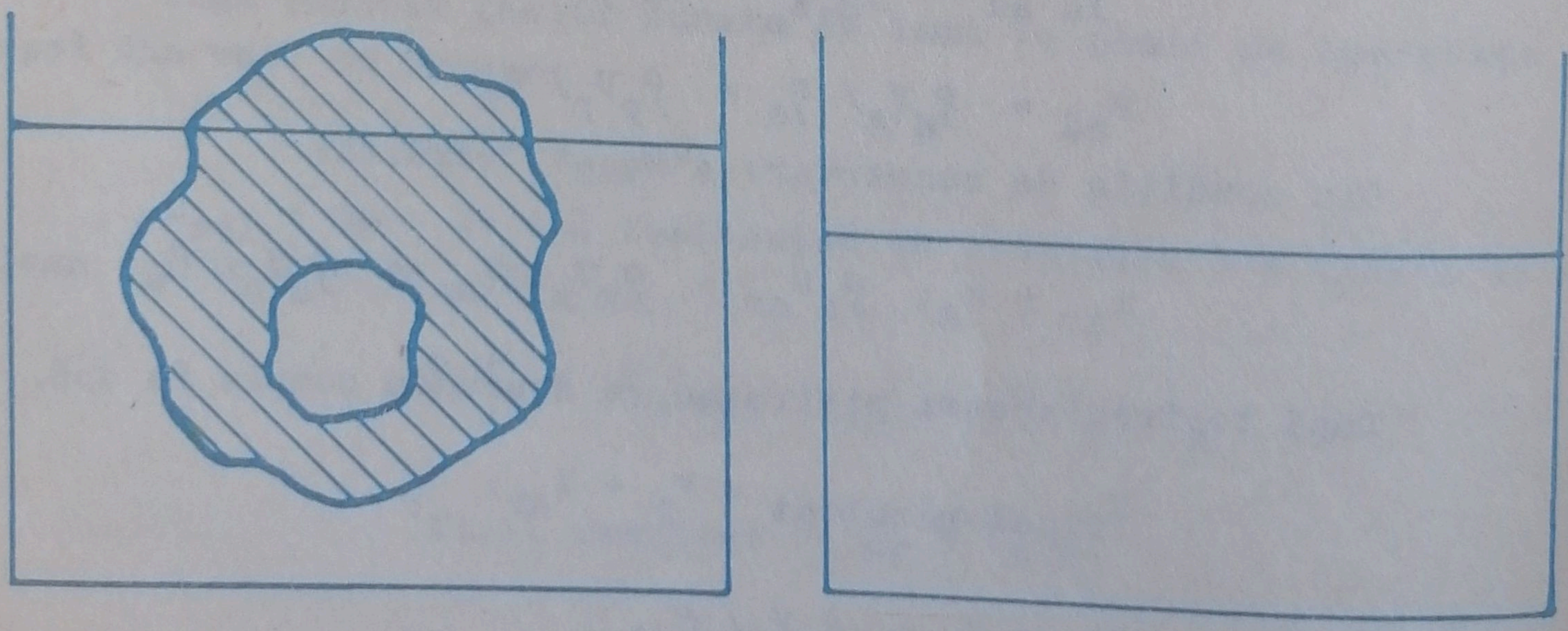


Figura I.144

Din condiţia de conservare a masei rezultă:

$$m_{ar} = m_g;\ \rho_a V_{ar} = \rho_g V_g;\ V_{ar} = \rho_g V_g / \rho_a.$$

După topirea gheţii bula de aer părăseşte vasul.

Să presupunem că:

$$V_{ar} < V_{ad}.$$

Rezultă:

$$\rho_g V_g / \rho_a < \rho_g V_g / \rho_a + \rho_{aer} V_{aer} / \rho_a;$$

$$\rho_{aer} V_{aer} / \rho_a > 0;\ \rho_{aer} > 0.$$

Deoarece concluzia este justă însemnează că ipoteza este adevărată. Ca urmare:

$$V_{ar} < V_{ad}.$$

Si în acest caz nivelul apei din vas a scăzut, după ce gheaţa din vas s-a topit.

Problema 92

Pe talerul A al unui cîntar cu braţe egale este aşezată o balanţă (ab) cu braţele egale. Pe talerul B al cîntarului s-a pus un vas cu apă. De capătul (a) al balanţei este suspendată o sferă cu raza R şi densitatea $\rho > \rho_0$. Pe talerul (b) sînt puse mase marcate pentru echilibrarea sferei. Se introduce sfera în vasul cu apă. Ce se va întîmpla? Ce trebuie făcut pentru a reface situaţia iniţială?

Rezolvare

Situaţia iniţială este prezentată în desenul din figura I.145.

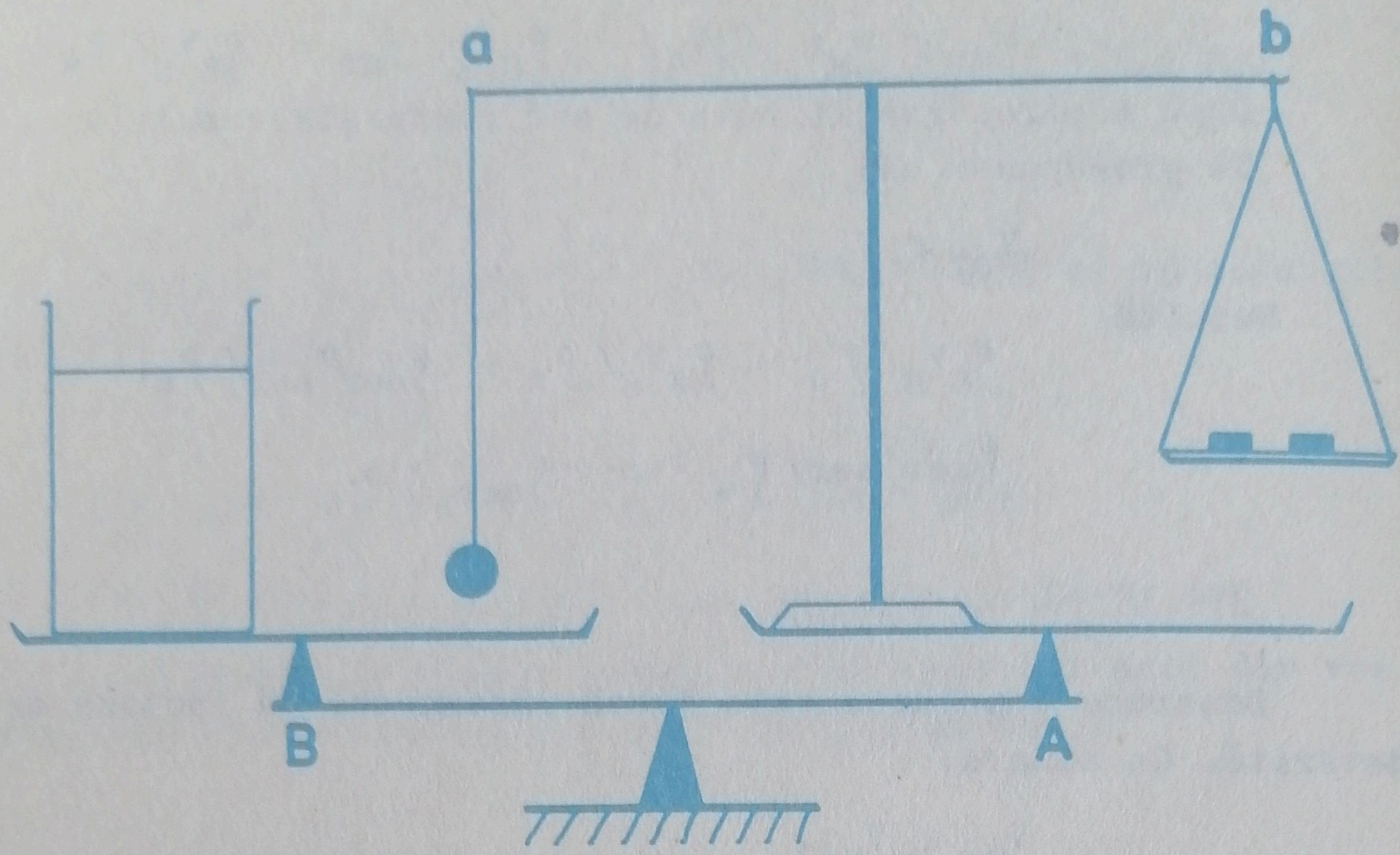


Figura I.145

Atunci cînd introducem sfera în vasul cu apă, apariţia unei forţe arhimedice exercitată de apa din vas asupra sferei determină ridicarea capătului (a) şi coborîrea capătului (b). Pîrghia (ab)se va dezechilibra.

Ca ur mare a principiului acţiunilor reciproce, sfera va reacţiona asupra lichidului din vas cu o forţă egală în modul, dar de sens contrar. Această forţă este transmisă prin lichid asupra talerului B, care devine aparent mai greu, cu o cantitate egală cu greutatea volumului de apă dezlocuit de sferă.

Incărcătura talerului B a devenit:

$$G_B = G + G_o;\ m_B = m + m_o.$$

Este deci evident că şi cîntarul AB se va dezechilibra: talerul B coboară, iar talerul A se ridică, aşa cum indică desenul din figura I.146.

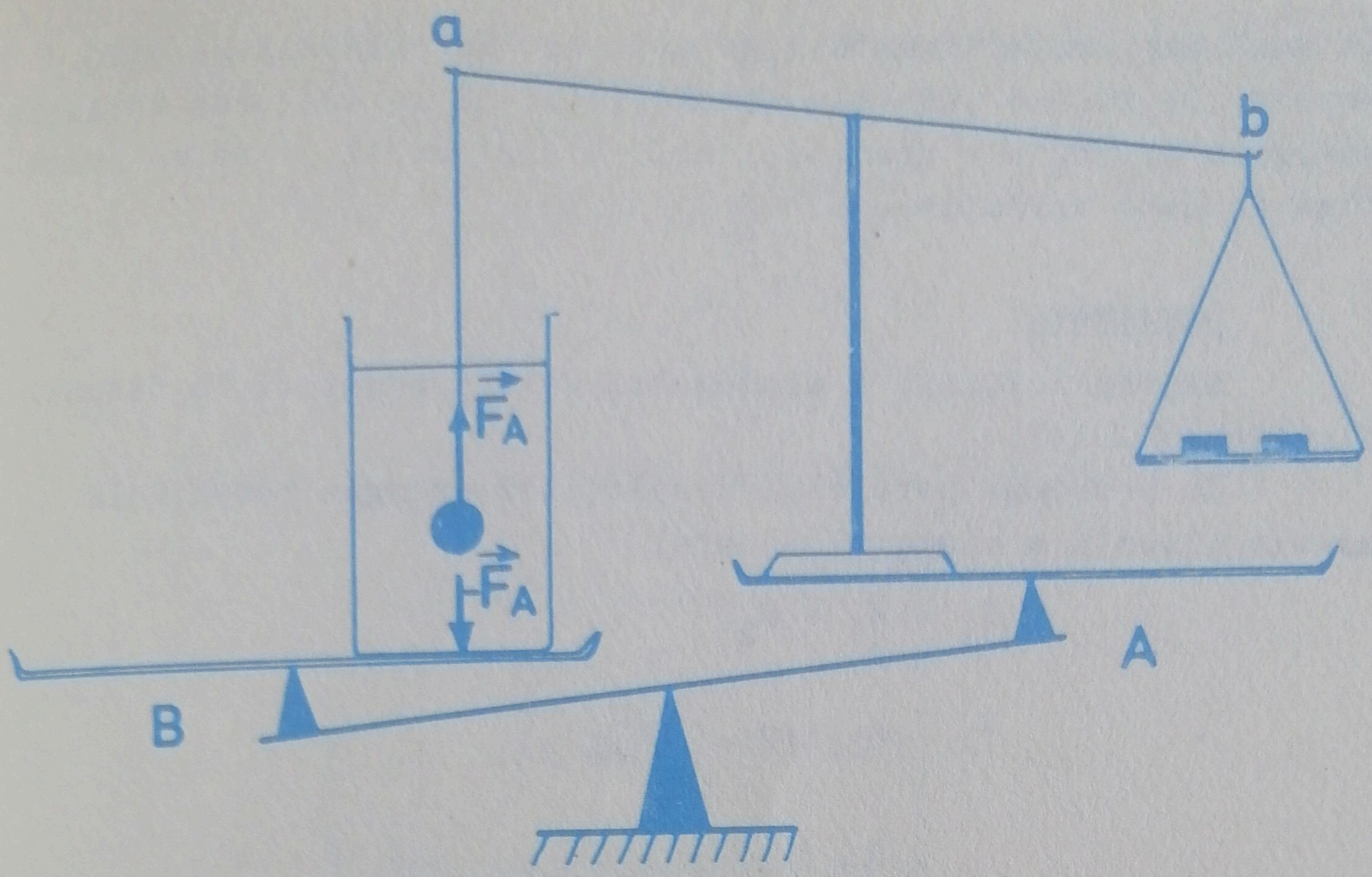


Figura I.146

Pentru a reechilibra balanţa (ab) se ridică de pe platanul (b) mase marcate a căror greutate să fie egală cu greutatea G_o, reprezentînd greutatea volumului de apă dezlocuit de sferă.

In acest fel încărcătura talerului A a scăzut cu cantitatea $2G_o$, fiind deci:

$$G_A = G - 2G_o.$$

Pentru a reechilibra cîntarul AB trebuie adăugat pe talerul A un corp cu greutatea G_x astfel încît noua încărcătură a talerului A să fie egală cu încărcătura talerului B.

$$G'_A = G_B;$$

$$G - 2G_o + G_x = G + G_o;$$

$$G_x = 3G_o;\ m_x = 3m_o.$$

Problema 93

Un vas în formă de cub cu latura L este împărţit în două compartimente cu volume egale, printr-un perete vertical.

In unul din compartimente este apă, iar în celălalt se află mercur. Se scoate peretele despărţitor. Să se evalueze variaţia energiei potenţiale gravitaţionale a sistemului şi să se justifice această variaţie.

Rezolvare

Starea iniţială a sistemului este prezentată în desenul din figura I.147.

In prezenţa peretelui despărţitor energia potenţială gravitaţională a sistemului este:

$$E_i = E_1 + E_2;$$

$$E_1 = m_1 gL/2 = \rho_1 gL/4;$$

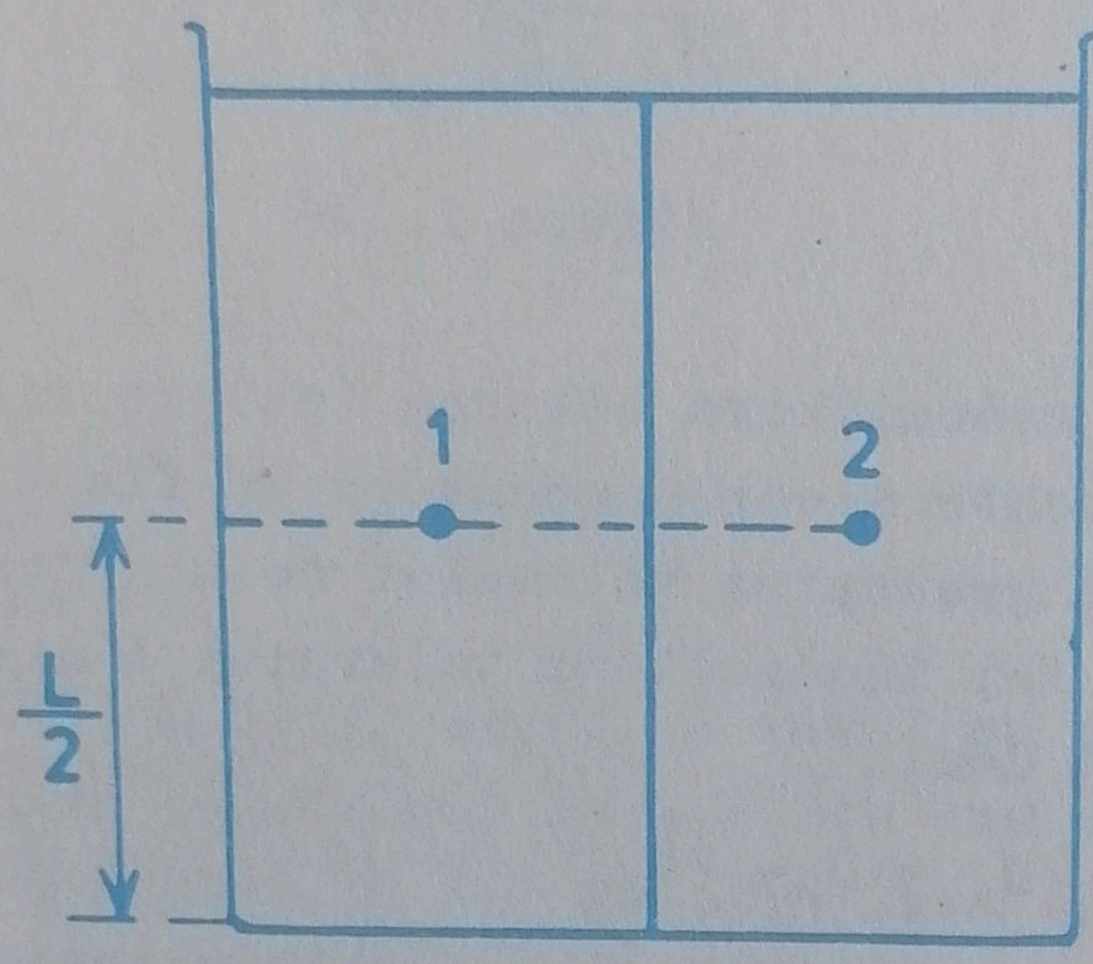


Figura I.147

$$E_2 = m_2 gL/2 = \rho_2 gL^4/4;$$

$$E_i = \frac{gL^4}{4}(\rho_1 + \rho_2).$$

Prin scoaterea peretelui despărţitor sistemul rămas este în echilibru instabil. De aceea el va evolua spre o stare cu echilibru stabil.

In desenul din figura I.148 este prezentată starea finală a sistemului, o stare de echilibru stabil, în care stratul de mercur se află la baza vasului.

Energia potenţială gravitaţională a sistemului este:

$$E_f = E_1' + E_2';$$

$$E_1' = m_1 g 3L/4 = 3 \rho_1 g L^4/8;$$

$$E_2' = m_2 gL/4 = \rho_2 g L^4/8;$$

$$E_f = \frac{gL^4}{8}(3\rho_1 + \rho_2).$$

Deoarece $\rho_2 > \rho_1$, este uşor de demonstrat că $E_f < E$ i.

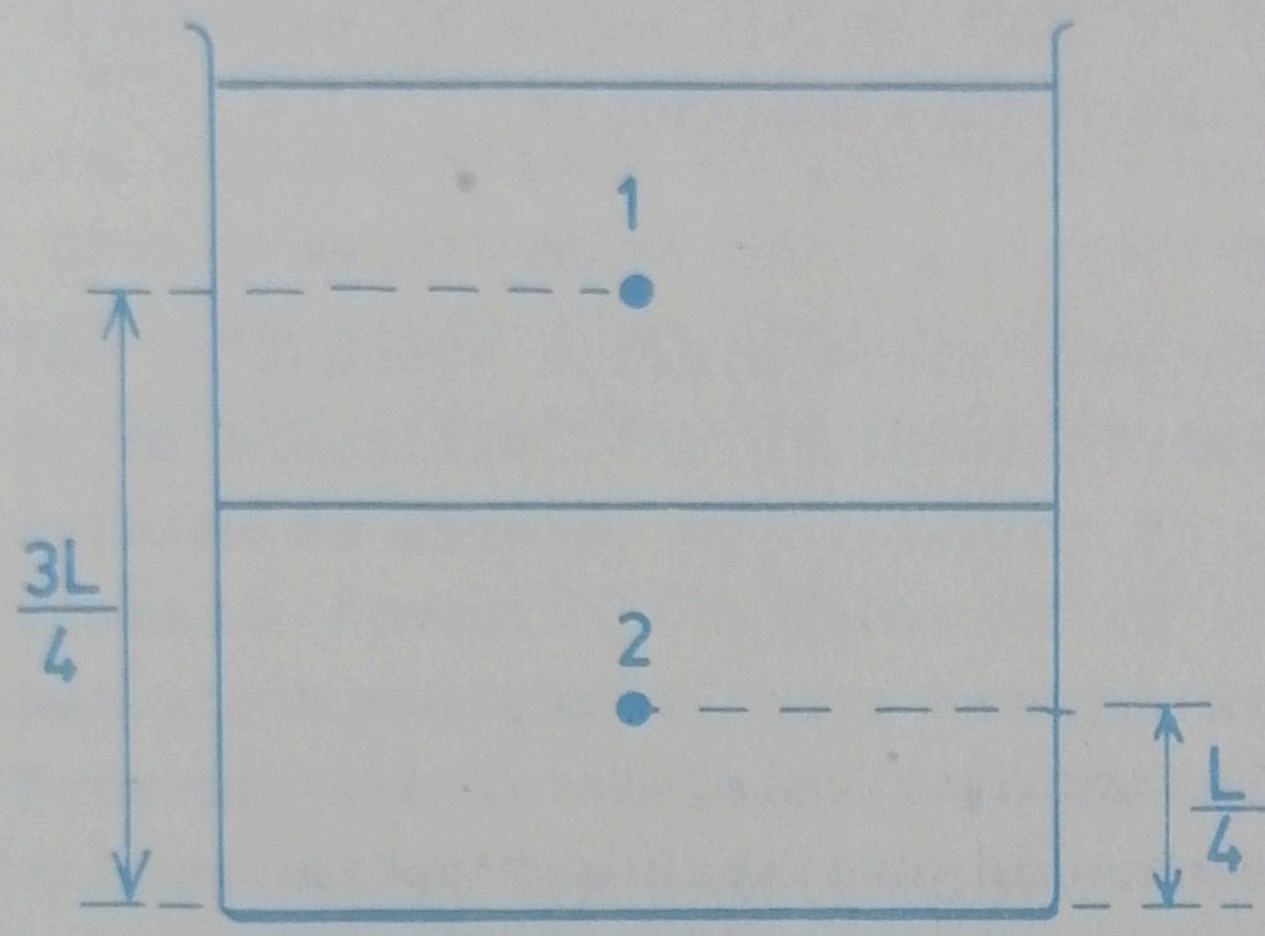


Figura I.148

Sistemul a evoluat spre o stare caracterizată de o energie potenţială minimă. Ca urmare starea finală este o stare de echilibru.

Variaţia energiei potenţiale gravitaţionale a sistemului este:

$$E_p = E_i - E_f = \frac{gL^4}{8}(\rho_2 - \rho_1).$$

In momentul în care am îndepărtat peretele vertical, cele două mase de lichid s-au pus în mişcare. Deci o parte din energia potenţială gravitaţională s-a transformat în energie cinetică, iar restul se regăseşte sub formă de energie potenţială gravitaţională în starea finală.

In final cînd apa şi mercurul din vas nu se mai mişcă energia cinetică se regăseşte sub formă de variaţie a energiei interne a acestora. Astfel, dacă iniţial lichidele aveau

temperatura t_i, în final ele vor avea temperatura $t_f > t_i$.

$$\Delta t = \frac{gL(\rho_2 - \rho_1)}{4(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)}.$$

Problema 94

Cunoaştem foarte bine ce efect are asupra adversarului, la tenis de cîmp sau la tenis de masă, o minge "tăiată", sau, la fotbal, o minge "cu efect". Dacă meciul de tenis sau de fotbal s-ar juca pe Lună ar mai putea fi expediate asemenea mingi de către jucătorii cosmonauţi?

Rezolvare

Să presupunem o minge sferică aşezată pe sol. Lovind-o excentric îi imprimăm acesteia atît o,mişcare de translaţie, cît şi o mişcare de rotaţie. Vom încerca să studiem separat cele două mişcări şi să vedem ce influenţă au asupra mingii.

Dacă sfera ar avea numai o mişcare de translaţie, desigur, datorită vîscozităţii sale, aerul din jur ar fi antrenat şi el într-o mişcare mai mult sau mai putin complicată.

Din punctul de vedere al unui observator de pe sol, pentru explicarea fenomenului putem considera că sfera este în repaus şi asupra ei trimitem un curent de aer.

De aceea să presupunem că în mocul unei mingi care se deplasează de la stînga spre dreapta, studiem o minge în repaus într-un curent de aer, care suflă de la dreapta spre stînga.

Desenul din figura I.149 reprezintă o astfel de sferă privită de deasupra.

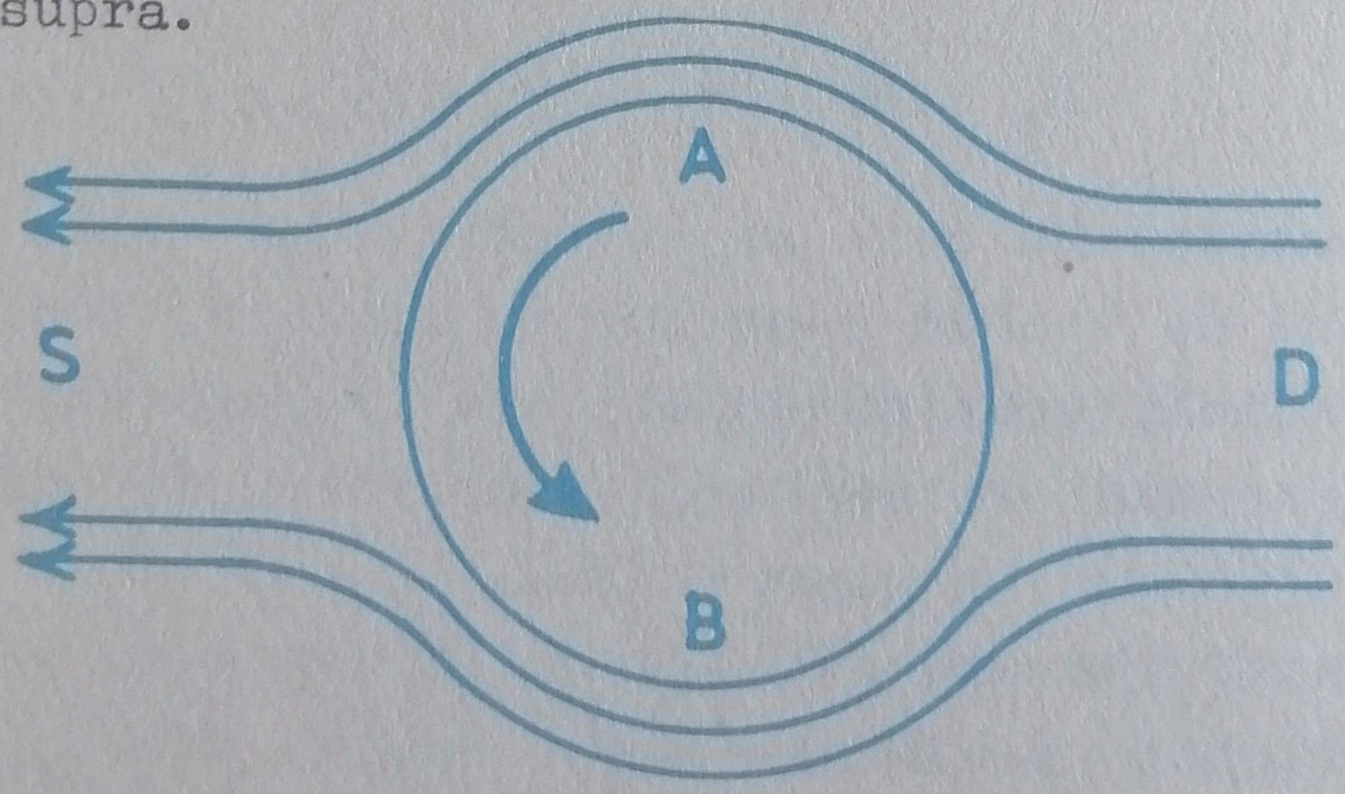


Figura I.149

In acest curent de aer presupunem că i-am imprimat sferei o mişcare de rotaţie în sensul indicat în desen. In regiunea A viteza tangenţială a unui punct de pe sferă are acelaşi sens cu viteza curentului de aer şi cum acesta are o anumită vîscozitate, aerul din această regiune va fi antrenat cu o viteză mai mare. In acest fel în zona A presiunea dinamică a aerului creşte şi în conformitate cu legea lui Bernoulli presiunea statică exercitată asupra sferei scade.

In regiunea B viteza tangenţială a unui punct de pe suprafaţa sferei are orientare inversă faţă de viteza aerului, încît în această regiune viteza aerului va fi micşorată. Astfel în regiunea B presiunea dinamică este obligată să scadă şi corespunzător presiunea statică va creşte. Apare astfel în mod evident o diferenţă de presiune statică între regiunea A şi regiunea B.

Deoarece $p_{sA} < p_{sB}$, mingea va fi împinsă spre regiunea A.

Revenind la mingea căreia, prin lovire, i s-a imprimat şi o mişcare de rotaţie, din cauza diferenţei de presiune statică care se formează, mingea se va abate lateral de la traiectoria pe care în mod normal ar fi trebuit să o urmeze. Această abatere este cunoscută sub numele de efect Magnus.

Pe suprafaţa Lunii, acolo unde nu există aer, efectul Magnus nu se produce.

Problema 95

Pe o suprafaţă orizontală, o minge cu masa m_1 şi viteza v, loveşte perfect elastic, dar necentric o minge cu masa m_2 aflată în repaus. Să se studieze ciocnirea mingilor în raport cu sistemul de referinţă al laboratorului (SRL) şi în raport cu sistemul de referinţă al centrului de masă al sistemului(SRCM).

Rezolvare

I. Ciocnirea corpurilor descrisă în raport cu SRL

In desenele din figura I.15o sînt prezentate cele două corpuri înainte de ciocnire şi după ciocnire.

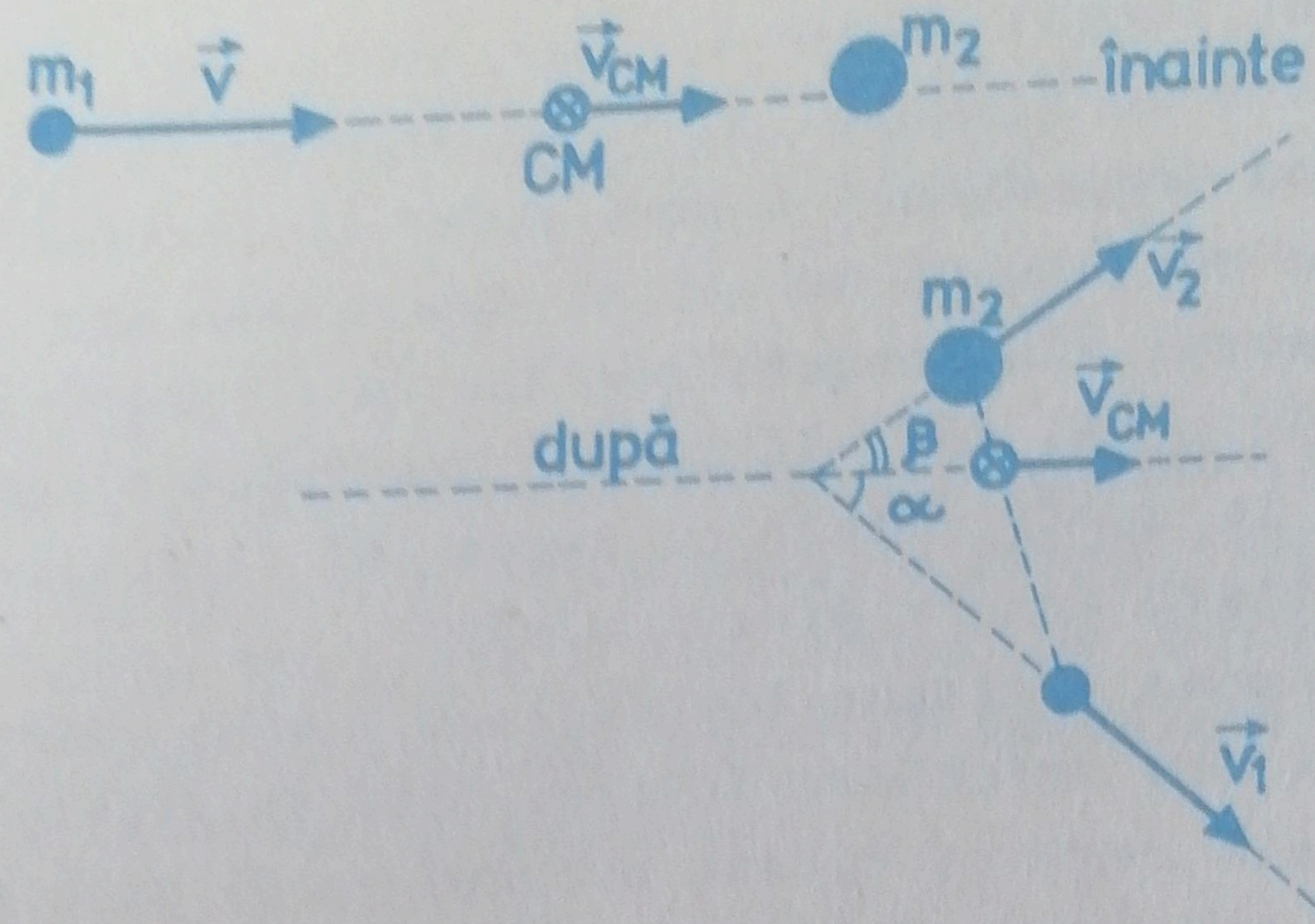


Figura I.15o

$\vec{v}$ = viteza corpului m_1 faţă de SRL, înainte de ciocnire;

$\vec{v}_{CM}$ = viteza centrului de masă al sistemului, faţă de SRL, înainte de ciocnire şi după ciocnire;

$\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ = vitezele celor două corpuri, faţă de SRL, după ciocnire;

$m_1\vec{v}$ = impulsul sistemului, faţă de SRL, înainte de ciocnire;

$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ = impulsul sistemului, faţă de SRL, după ciocnire;

$(m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$ = impulsul centrului de masă faţă de SRL.

Sistemul celor două corpuri este izolat de exterior şi ca urmare impulsul acestuia se conservă, fiind egal în orice moment cu impulsul centrului de masă.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} = \text{constant.}$$

Ciocnirea celor două corpuri nu modifică mişcarea centrului de masă al sistemului. Ca urmare:

$$\vec{v}_{CM} = \text{constant.}$$

Cei doi vectori: $\vec{v}$ şi $\vec{v}_{CM}$ au aceeaşi orientare. Rezultă:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)v_{CM};$$

$$v_{CM} \hat{=} \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}.$$

Relaţia vectorială, reprezentînd legea conservării impulsului, poate fi proiectată pe două axe perpendiculare. Rezultă:

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta ;$$

$$o = m_1 v_1 \sin\alpha - m_2 v_2 \sin\beta ;$$

$$m_1(v - v_1\cos\alpha) = m_2 v_2 \cos\beta ;$$

$$m_1 v_1 \sin\alpha = m_2 v_2 \sin\beta ;$$

$$m_1^2(v - v_1\cos\alpha)^2 = m_2^2 v_2^2 \cos^2\beta ;$$

$$m_1^2 v_1^2 \sin^2\alpha = m_2^2 v_2^2 \sin^2\beta ;$$

$$m_1^2\{v^2 - 2vv_1\cos\alpha) + v_1^2\cos^2\alpha + v_1^2\sin^2\alpha\} =$$

$$= m_2^2 v_2^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta);$$

$$m_1^2(v^2 - 2vv_1\cos\alpha + v_1^2) = m_2^2 v_2^2;$$

$$v^2 + v_1^2 - 2vv_1\cos\alpha = m_2^2 v_2^2/m_1^2.$$

Folosind legea conservării energiei mecanice rezultă:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2};$$

$$v_2^2 = \frac{m_1}{m_2}(v^2 - v_1^2);$$

$$v^2 + v_1^2 - 2vv_1\cos\alpha = \frac{m_2^2 m_1}{m_1^2 m_2}(v^2 - v_1^2);$$

$$v^2(1 - \frac{m_2}{m_1}) + v_1^2(1 + \frac{m_2}{m_1}) - 2vv_1\cos\alpha = o;$$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1} v^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_1^2 - 2m_1 vv_1\cos\alpha = o.$$

Impărţind ultima relaţie prin $(m_1 + m_2)v^2$, rezultă:

$$\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 - 2\frac{m_1\cos\alpha}{m_1 + m_2}\frac{v_1}{v} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0;$$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{m_1\cos\alpha \pm \sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\alpha}}{m_1 + m_2}. \qquad (1)$$

II. Ciocnirea corpurilor descrisă în raport cu SRCM

1) Inainte de ciocnire

$\vec{v}_{1;CM}$ = viteza corpului cu masa m_1, faţă de SRCM, înainte de ciocnire;

$$\vec{v}_{1;CM} = \vec{v} - \vec{v}_{CM}.$$

Deoarece $v_{CM} < v$, orientarea lui $\vec{v}_{1;CM}$ coincide cu orientarea lui $\vec{v}$ şi a lui $\vec{v}_{CM}$, aşa cum indică desenul din figura I.151.

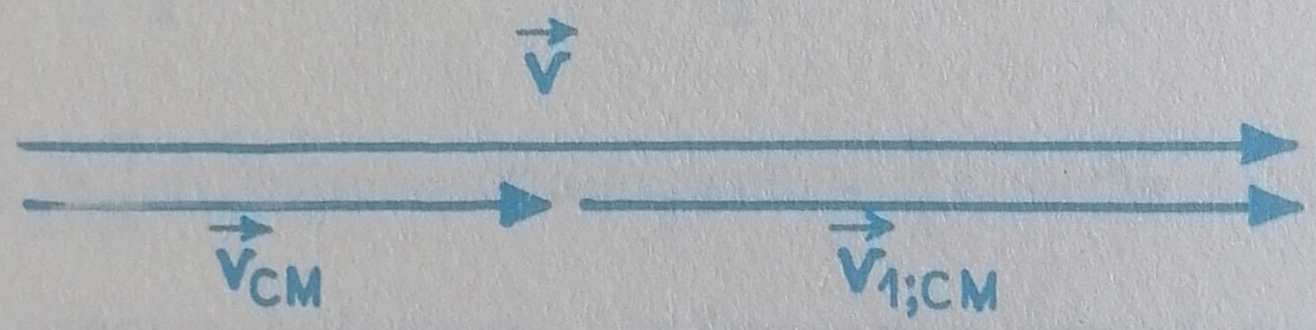


Figura I.151

$$v_{1;CM} = \sqrt{v^2 + v_{CM}^2 - 2vv_{CM}\cos 0^\circ} = v - v_{CM};$$

$$v_{1;CM} = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}.$$

$\vec{v}_{2;CM}$ = viteza corpului cu masa m_2, faţă de SRCM, înainte de ciocnire;

$$\vec{v}_{2;CM} = 0 - \vec{v}_{CM};\ \vec{v}_{2;CM} = -\vec{v}_{CM};\ v_{2;CM} = v_{CM};$$

$$v_{2;CM} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}.$$

Orientarea lui $\vec{v}_{CM}$ este opusă orientării lui $\vec{v}_{2;CM}$, aşa cum indică desenul din figura I.152.

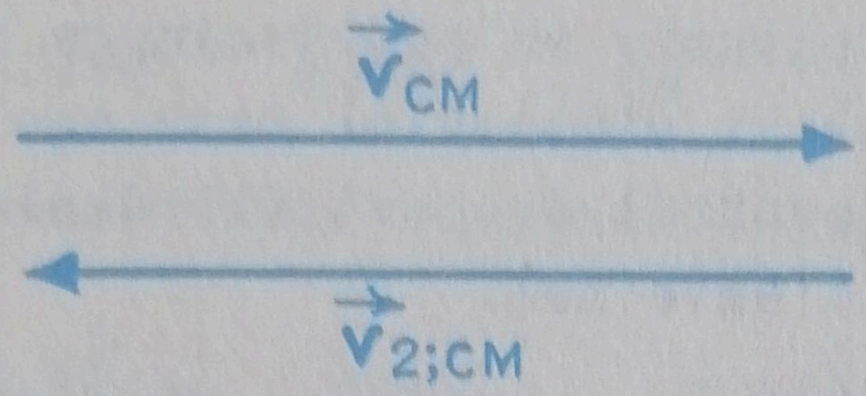


Figura I.152

In raport cu SRCM, înainte de ciocnire, cele două corpuri se deplasează pe aceeaşi direcţie, în sensuri opuse, aşa cum indică desenul din figura I.153.

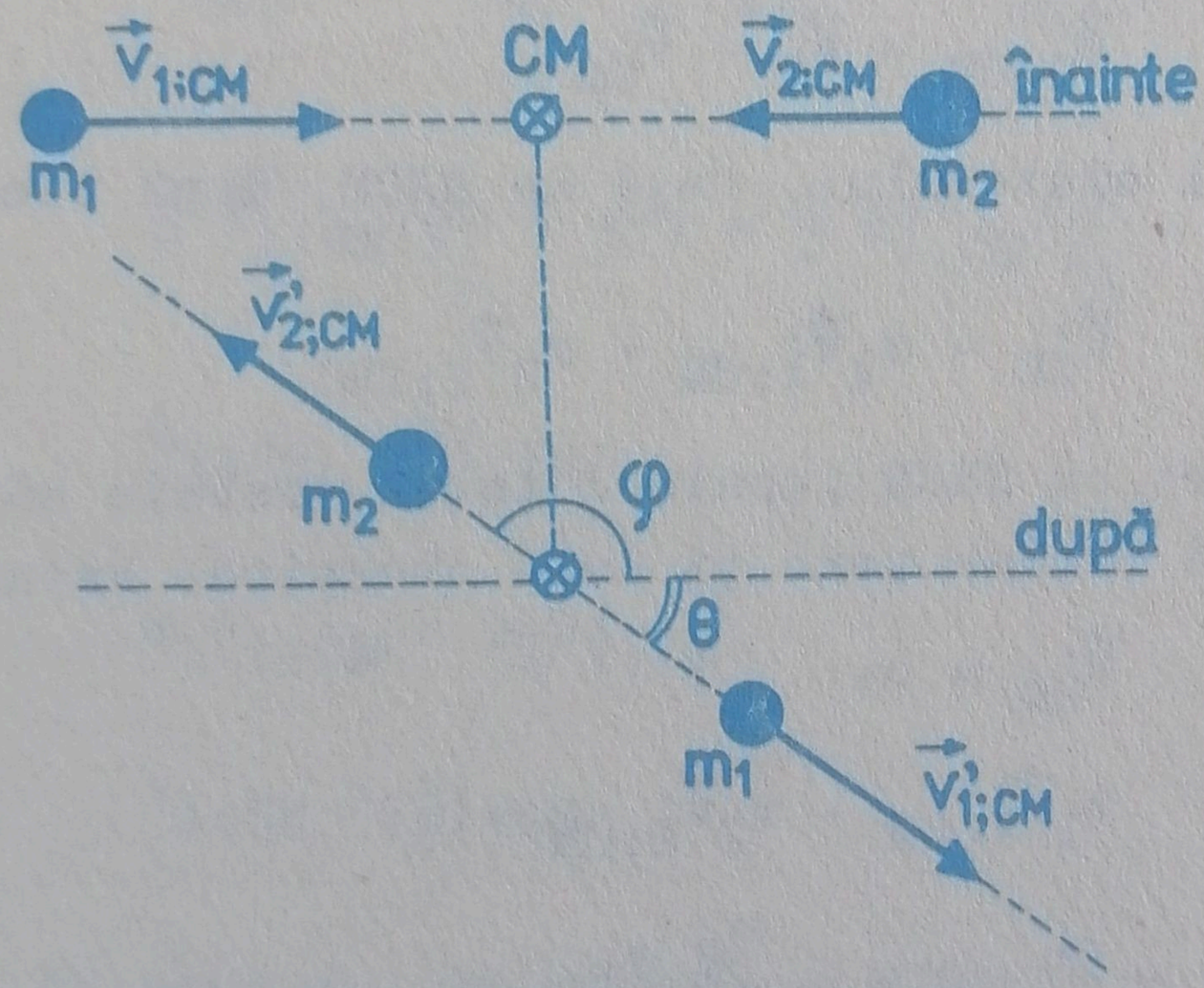


Figura I.153

Impulsul total al sistemului, înainte de ciocnire, în raport cu SRCM este:

$$\vec{H}_{CM} = m_1\vec{v}_{1;CM} + m_2\vec{v}_{2;CM};$$

$$H^2_{CM} = m_1^2v^2_{1;CM} + m_2^2v^2_{2;CM} + 2m_1v_{1;CM}m_2v_{2;CM}\cos 180^o$$

$$H_{CM} = m_1v_{1;CM} - m_2v_{2;CM};$$

$$H_{CM} = \frac{m_1 m_2 v}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 m_1 v}{m_1 + m_2} = o;$$

$$H_{CM} = o; \ \vec{H}_{CM} = o.$$

La aceeaşi concluzie se putea ajunge ştiind că în orice moment impulsul total al sistemului este egal cu impulsul centrului de masă. Dar centrul de masă fiind ales ca sistem de referinţă, impulsul său este nul.

2) După ciocnire

$\vec{v}'_{1;CM}$ = viteza corpului cu masa m_1, faţă de SRCM, după ciocnire;

$$\vec{v}'_{1;CM} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM};$$

$\vec{v}'_{2;CM}$ = viteza corpului cu masa m_2, faţă de SRCM, după ciocnire;

$$\vec{v}'_{2;CM} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM}.$$

Impulsul sistemului, faţă de SRCM, după ciocnire este:

$$\vec{H}'_{CM} = m_1 \vec{v}'_{1;CM} + m_2 \vec{v}'_{2;CM}.$$

In raport cu SRCM impulsul total trebuie să se conserve, deci trebuie să rămînă zero şi după ciocnire. Rezultă:

$$\vec{H}'_{CM} = o;$$

$$m_1 \vec{v}'_{1;CM} + m_2 \vec{v}'_{2;CM} = o;$$

$$\vec{v}'_{1;CM} = - \frac{m_2}{m_1} \vec{v}'_{2;CM}.$$

După ciocnire, în raport cu SRCM, cele două corpuri se deplasează pe aceeaşi direcţie (alta decît înainte de ciocnire) dar în sensuri opuse, aşa cum indică desenul din figura I.153.

$$\vec{H}_{CM} = \vec{H}_{1;CM} + \vec{H}_{2;CM};$$

$$\vec{H}'_{CM} = \vec{H}'_{1;CM} + \vec{H}'_{2;CM}; \ \vec{H}_{CM} = \vec{H}'_{CM} = o;$$

$$\vec{H}_{1;CM} + \vec{H}_{2;CM} = \vec{H}'_{1;CM} + \vec{H}'_{2;CM} = 0;$$

$$\vec{H}_{1;CM} = -\vec{H}_{2;CM};\ \vec{H}'_{1;CM} = -\vec{H}'_{2;CM};$$

$$H_{1;CM} = H_{2;CM};\ H'_{1;CM} = H'_{2;CM}.$$

Din legea conservării energiei mecanice, în raport cu SRCM, rezultă:

$$\frac{m_1 v_{1;CM}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2;CM}^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_{1;CM}}{2} + \frac{m_2 v'^2_{2;CM}}{2};$$

$$\frac{m_1^2 v_{1;CM}^2}{2m_1} + \frac{m_2^2 v_{2;CM}^2}{2m_2} = \frac{m_1^2 v'^2_{1;CM}}{2m_1} + \frac{m_2^2 v'^2_{2;CM}}{2m_2};$$

$$\frac{H_{1;CM}^2}{2m_1} + \frac{H_{2;CM}^2}{2m_1} = \frac{H'^2_{1;CM}}{2m_1} + \frac{H'^2_{2;CM}}{2m_2};$$

$$\frac{1}{2} H_{1;CM}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} H'^2_{1;CM} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right);$$

$$H_{1;CM} = H'_{1;CM};$$

$$m_1 v_{1;CM} = m_1 v'_{1;CM};$$

$$v_{1;CM} = v'_{1;CM}.$$

Corpul cu masa m_1, în raport cu SRCM, îşi păstrează aceeaşi valoare pentru viteză şi după ciocnire. Orientarea vitezei corpului cu masa m_2, în raport cu SRCM, se schimbă după ciocnire.

$$v'_{2;CM} = \frac{m_1}{m_2} v'_{1;CM} = \frac{m_1}{m_2} v_{1;CM} = \frac{m_1}{m_2} \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} = v_{2;CM}.$$

Si corpul cu masa m_2, în raport cu SRCM, păstrează aceeaşivaloare pentru viteză şi după ciocnire.

In raport cu SRCM ciocnirea corpurilor influenţează numai direcţia pe care se vor deplasa corpurile după ciocnire.

A stabili pe ce direcţie se deplasează corpurile după ciocnire, faţă de SRCM, însemnează a determina valoarea unghiului θ, notat în desenul din figura I.153.

Pentru aceasta să reamintim mai întîi că:

$$\vec{v}'_{1;CM} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM};$$

$$\vec{v}'_{2;CM} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM};$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_{1;CM};$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_{2;CM}.$$

Avînd în vedere desenul din figura I.15o şi desenul din figura I.153, cele două relaţii vectoriale de mai sus au fost reprezentate grafic în desenul din figura I.154.

In baza desenului din figura I.154 se poate face o legătură între SRL şi SRCM. Rezultă:

$$v_2^2 = v_{CM}^2 + v_{2;CM}'^2 + 2v_{CM}v'_{2;CM}\cos(18o^o - \theta);$$

$$v_2^2 = v_{CM}^2 + v_{2;CM}'^2 - 2v_{CM}v'_{2;CM}\cos\theta;$$

$$v_2^2 = \frac{2m_1^2v^2}{(m_1 + m_2)^2}(1 - \cos\theta).$$

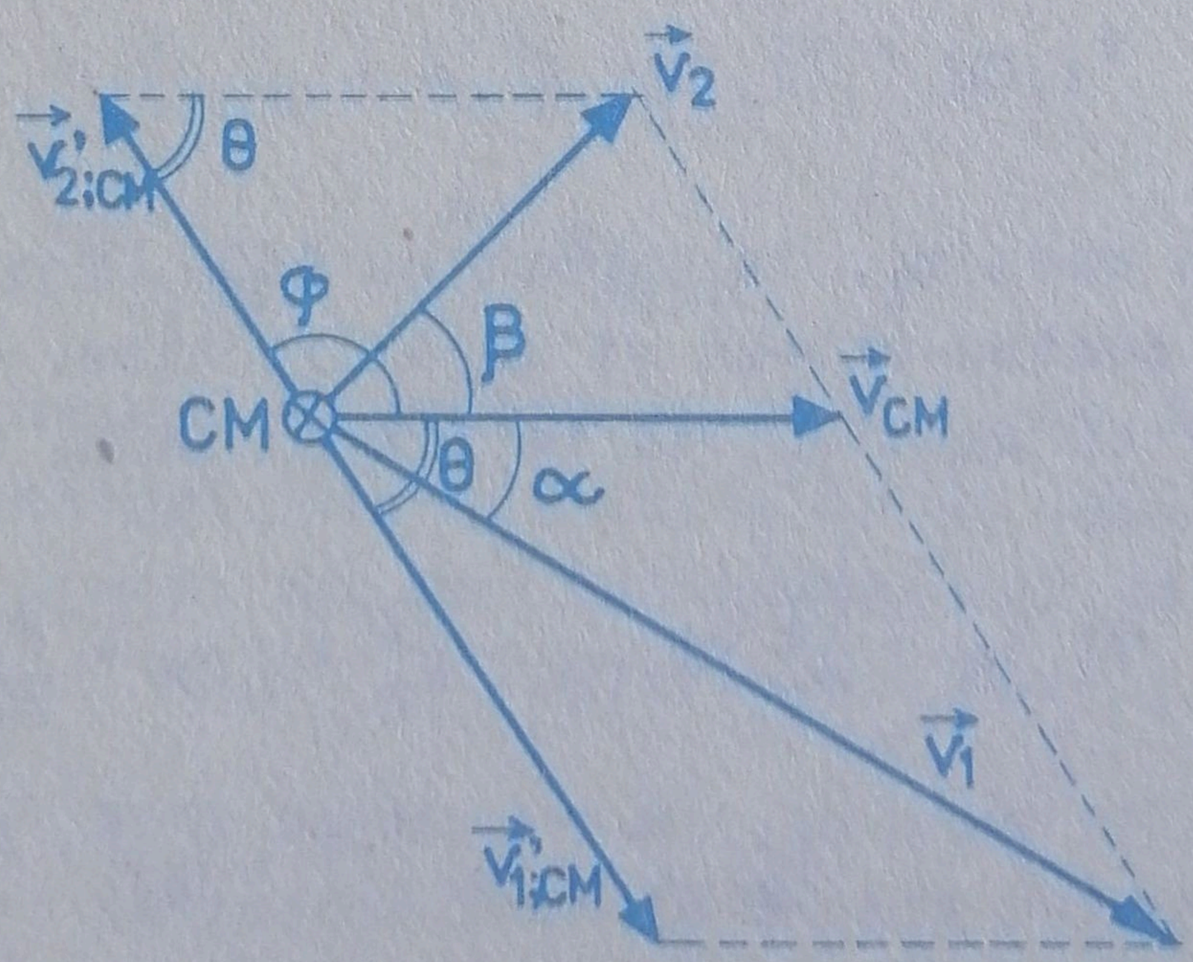


Figura I.154

Am demonstrat anterior că:

$$v_1^2 = v^2 - \frac{m_2}{m_1} v_2^2.$$

Rezultă:

$$v_1^2 = v^2 - \frac{2m_1m_2v^2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos\theta);$$

$$v_1^2 = v^2\left\{ 1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}(1 - \cos\theta)\right\};$$

$$\frac{v_1}{v} = \sqrt{1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}(1 - \cos\theta)};$$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 2m_1m_2(1 - \cos\theta)}}{m_1 + m_2}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$m_1\cos\alpha \pm \sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2} =$$

$$= \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 2m_1m_2(1 - \cos\theta)}. \qquad (3)$$

In triunghiul inferior din desenul prezentat în figura I.154, aplicînd teorema sinusurilor, rezultă:

$$\frac{\sin(\theta - \alpha)}{v_{CM}} = \frac{\sin\alpha}{v'_{1;CM}};$$

$$v'_{1;CM} = v_{1;CM};$$

$$\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{v_{CM}}{v_{1;CM}};$$

$$\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\alpha} = m_1/m_2. \qquad (4)$$

Relaţiile (3) şi (4) formează un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute: θ şi α .

Problema 96

Să se studieze mişcarea unui satelit artificial aflat sub acţiunea forţei de atracţie gravitaţională exercitată asupra sa de Pămînt.

Rezolvare

I. Energia potenţială gravitaţională a sistemului

Elementele unui sistem mecanic pot fi în mişcare unul în raport cu altul, precum şi în interacţiune, corespunzător configuraţiei pe care sistemul o are.

Intercaţiunea dintre elementele sistemului se poate realiza printr-un cîmp fizic de o anumită natură (gravitaţională, electrică, magnetică etc.).

In cazul interacţiunilor gravitaţionale configuraţia sistemului este determinată prin distanţa dintre elementele sistemului.

Pentru a caracteriza starea sistemului din punct de vedere al mişcării elementelor sale introducem conceptul de energie cinetică.

Pentru a caracteriza starea sistemului din punct de vedere al configuraţiei acestuia introducem conceptul de energie potenţială.

Atunci cînd, urmare a interacţiunilor dintre elementele sistemului, energia cinetică a sistemului variază cu cantitatea:

$$\Delta E_c = E_{c;final} - E_{c;iniţial},$$

se schimbă şi configuraţia sistemului. Corespunzător va exista şi o variaţie a energiei potenţiale a sistemului:

$$\Delta E_p = E_{p;final} - E_{p;iniţial}.$$

Considerînd că interacţiunile sînt conservative, energia potenţială a sistemului trebuie să varieze cu o cantitate egală în modul cu variaţia energiei cinetice, dar opusă ca semn, în aşa fel încît suma algebrică a celor două variaţii să fie nulă.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0. \qquad (1)$$

In acest fel orice variaţie a energiei cinetice a sistemului este compensată de o variaţie egală în modul, dar opusă ca semn a energiei potenţiale a sistemului, astfel încît suma acestora este o constantă în timpul mişcării:

$$E_c + E_p = \text{constant.} \qquad (2)$$

Energia potenţială a unui sistem reprezintă o formă de energie înmagazinată, care poate fi în întregime recuperată şi convertită în energie cinetică. Nu putem asocia o energie potţială cu o forţă neconservativă, cum este forţa de frecare.

Să presupunem că elementele sistemului considerat interacţionează printr-un cîmp de natură gravitaţională. Forţele care se exercită în acest cîmp sînt forţe conservative.

Intr-un astfel de cîmp variaţia energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic al rezultantei forţelor conservative:

$$\Delta E_c = L_{\vec{R}} = L_{if}; \qquad (3)$$

$\vec{R}$ = rezultanta forţelor conservative;

L_{if} = lucrul mecanic efectuat la trecerea din starea iniţială (i) în starea finală (f).

In general, variaţia energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic al rezultantei tuturor forţelor (conservative şi neconservative).

Din (1) şi (3) rezultă:

$$\Delta E_p = - L_{\vec{R}} = - L_{if}, \qquad (4)$$

adică variaţia energiei potenţiale gravitaţionale a sistemului este egală cu lucrul mecanic al rezultantei forţelor conservative, luat cu semn schimbat.

Pe baza relaţiei (4) vom evalua variaţia energiei potenţiale gravitaţionale a sistemului satelit - Pămînt, atunci cînd configuraţia sistemului (distanţa dintre satelit şi Pămînt) se modifică.

Dat fiind faptul că interacţiunea dintre satelit şi Pămînt se manifestă printr-o forţă de atracţie, prin analogie cu interacţiunea electrostatică dintre două corpuri electrizate cu sarcini de semn contrar, cînd:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} < o,$$

vom scrie pentru modulul forţei de atracţie gravitaţională expresia:

$$F = - k \frac{mM}{r^2} < o.$$

Folosind relaţia (4) şi presupunînd că satelitul se mişcă spre Pămînt de-a lungul unei linii radiale, rezultă:

$$E_{pf} - E_{pi} = - \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}\, d\vec{r} = - \int_{r_i}^{r_f} F\, dr \cos 0^o;$$

$$E_{pf} - E_{pi} = - \int_{r_i}^{r_f} F\, dr = kmM \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2}$$

$$E_{pf} - E_{pi} = - k \frac{mM}{r_f} - (-k \frac{mM}{r_i}). \qquad (5)$$

Pe baza relaţiei (5) se poate evalua variaţia energiei potenţiale gravitaţionale a sistemului, atunci cînd configuraţia sistemului satelit - Pămînt se modifică.

Relaţia (5) poate fi scrisă şi astfel:

$$E_{pf} - E_{pi} = (-k \frac{mM}{r_f} + C) - (-k \frac{mM}{r_i} + C),$$

unde C este o constantă nedeterminată, dar a cărei prezenţă nu schimbă valoarea lui ΔE_p.

Considerînd că prima paranteză caracterizează configuraţia sistemului în starea finală, iar a doua paranteză caracterizează sistemul în starea iniţială, printr-o identificare de termeni, rezultă:

$$E_{pi} = - k \frac{mM}{r_i} + C; \qquad (6)$$

$$E_{pf} = - k \frac{mM}{r_f} + C.$$

Relaţiile (6) dovedesc cum că energia potenţială gravitaţională corespunzătoare unei anumite stări nu poate fi evaluată deoarece constanta C este nedeterminată.

In toate problemele practice interesează însă numai variaţia energiei potenţiale gravitaţionale a sistemului, nefiind necesară cunoa terea constantei C.

Pentr a-i da totuşi o valoa re energiei potenţiale gravitaţionale a stării finale ($E_{pf} = E_p$) alegem configuraţia iniţială drept configuraţie de referinţă, atribuindu-i energiei sale potenţiale, prin convenţie o valoare arbitrară, de obicei zero ($E_{pi} = o$).

Alegem drept configuraţie de referinţă, configuraţia în care distanţa dintre satelit şi Pămînt este infinită, iar pentru energia potenţială corespunzătoare acestei stări propunem valoarea zero.

In aceste condiţii energia potenţială gravitaţională a sistemului satelit - Pămînt, corespunzătoare configuraţiei stării finale ($r_f = r$) se calculează astfel:

$$E_p = - \int_{\infty}^{r} \vec{F}\, d\vec{r} = - \int_{\infty}^{r} F\, dr \cos 0^{o} = - \int_{\infty}^{r} F\, dr;$$

$$E_p = kmM \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = - k \frac{mM}{r} \Bigg|_{\infty}^{r} = - k \frac{mM}{r} + o;$$

$$E_p = - k \frac{mM}{r}. \qquad (7)$$

Ene rgia potenţială gravitaţională este o mărime caracteristică sistemului de corpuri şi nu fiecărui element al sistemului. Nu are sens să atribuim o parte din energia potenţială satelitului şi o parte Pămîntului.

C-da 69 coala 19

Semnul minus din expresia energiei potenţiale gravitaţionale arată că unei micşorări a distanţei dintre elementele sistemului îi corespunde o scădere a energiei potenţiale gravitaţionale.

In această observaţie recunoaştem sensul evoluţiei naturale a elementelor sistemului spre o configuraţie caracterizată de o energie potenţială gravitaţională minimă.

II. Viteze cosmice

Să presupunem că dintr-un punct de pe suprafaţa Pămîntului se lansează o rachetă care ridică pînă la altitudinea h un satelit. Acolo, în afara atmosferei, satelitul se desprinde de rachetă şi i se imprimă o viteză orizontală necesară înscrierii pe o anumită traiectorie, numită viteză de injecţie ($\vec{v}_i$).

1) Prima viteză cosmică

Valoarea vitezei de injecţie pentru care traiectoria satelitului este un cerc cu centrul în centrul Pămîntului reprezintă prima viteză cosmică ($\vec{v}_I$).

Pe orbita circulară forţa de atracţie gravitaţională îndeplineşte rolul unei forţe centripete, cauză a oricărei mişcări circulare uniforme:

$$k \frac{mM}{(R + h)^2} = \frac{mv_I^2}{R + h};$$

$$v_I = \sqrt{k \frac{M}{R + h}}.$$

Se observă că viteza necesară menţinerii pe o orbită circulară este cu atît mai mică cu cît satelitul trebuie să evolueze la o altitudine mai mare.

$$v_I = \sqrt{k \frac{M}{(R + h)^2}(R + h)} = \sqrt{g_h(R + h)}.$$

Dacă satelitul trebuie să evolueze foarte aproape de sol (h = o), atunci viteza necesară menţinerii pe orbita circulară joasă, în absenţa frecărilor, este:

$$v_I = \sqrt{g_o R} = 7,9 \text{ km/s}.$$

Energia totală a sistemului satelit - Pămînt, este:

$$E = E_c + E_p = \frac{mv_I^2}{2} - k\frac{mM}{R+h} = k\frac{mM}{2(R+h)} - k\frac{mM}{R+h};$$

$$E = -k\frac{mM}{2(R+h)}.$$

Dacă $v_i < v_I$, ,atunci traiectoria satelitului va fi o elipsă, avînd Pămîntul în focarul opus punctului de injecţie.

2) A doua viteză cosmică

In astronautică interesează nu numai plasarea unui satelit pe o orbită în jurul Pămîntului, ci şi scoaterea satelitului de sub acţiunea cîmpului gravitaţional terestru, operaţiune denumită: "evadarea din cîmpul gravitaţional terestru".

Valoarea vitezei de injecţie necesară evadării din cîmpul gravitaţional terestru reprezintă a doua viteză cosmică (V_{II}).

Se consideră că evadarea a reuşit atunci cînd satelitul s-a depărtat de Pămînt la o distanţă infinit de mare, iar acolo el se află în repaus faţă de Pămînt.

Scriind legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$E_{c;h} + E_{p;h} = E_{c;\infty} + E_{p;\infty};$$

$$\frac{mv_{II}^2}{2} - k\frac{mM}{R+h} = o;$$

$$v_{II} = \sqrt{2k\frac{M}{R+h}} = \sqrt{2k\frac{M}{(R+h)^2}(R+h)};$$

$$v_{II} = \sqrt{2g_h(R+h)} = \sqrt{2}\, v_I.$$

Dacă lansarea se realizează de la sol, neglijînd rezistenţa aerului şi presupunînd Pămîntul imobil, rezultă:

$$v_{II} = \sqrt{2g_o R} = 11,2 \text{ km/s}.$$

Dacă viteza cu care se iniţiază evadarea este egală cu v_{II}, calculat anterior, atunci satelitul se depărtează de Pămînt pe o traiectorie parabolică.

In cazul în care viteza de injecţie îndeplineşte condiţia:

$$v_I < v_i < v_{II},$$

atunci satelitul va evolua pe o elipsă avînd Pămîntul în focarul apropiat punctului de injecţie.

Pentru valori ale vitezei de injecţie $v_i > v_{II}$ satelitul evadează din cîmpul gravitaţional terestru, depărtîndu-se de Pămînt pe o traiectorie hiperbolică.

3) A treia viteză cosmică

Dacă un satelit de pe Pămînt are drept ţintă un astru din afara sistemului solar, atunci satelitul trebuie să evadeze din cîmpul gravitaţional al Soarelui.

Valoarea vitezei satelitului, în momentul plecării de pe Pămînt, pentru a evada din cîmpul gravitaţional al Soarelui, reprezintă a treia viteză cosmică (v_{III}).

Faţă de Pămînt valoarea sa este:

$$v_{III} = 16,6 \text{ km/s}.$$

4) A patra viteză cosmică

Un satelit lansat de pe Pămînt, pentru a părăsi Galaxia noastră are nevoie la start de o viteză denumită a patra viteză cosmică, a cărei valoare este:

$$v_{IV} = 290 \text{ km/s}.$$

III. Paradoxul sateliţilor

In general, sateliţii lansaţi de pe Pămînt urmează traiectorii în formă de elipsă, avînd Pămîntul în unul din focare.

Aceşti sateliţi, mişcăndu-se în păturile superioare ale atmosferei, întîmpină o forţă de rezistenţă (forţă neconservativă). S-ar putea crede că, urmare a acestei forţe de rezistenţă, viteza satelitului să fie din ce în ce mai mică.

In realitate viteza satelitului este din ce în ce mai mare, adevăr cunoscut sub numele de "paradoxul sateliţilor".

Cum se explică acest paradox?

Rezistenţa la înaintare întîmpinată de satelit are ca efect apropierea orbitei acestuia de suprafaţa Pămîntului. In acest fel satelitul se mişcă în regiuni în care intensitatea cîmpului gravitaţional este din ce în ce mai mare. Rezultă că mişcarea satelitului este accelerată, deci viteza acestuia este din ce în ce mai mare.

Concluzie: frînarea atmosferică determină creşterea vitezei satelitului în raport cu Pămîntul.

IV. Traiectoria satelitului în raport cu Pămîntul

1) Viteza şi acceleraţia satelitului într-un sistem de coordonate polare plane

Mişcarea satelitului în raport cu Pămîntul este o mişcare plană. Planul desenului din figura I.155 reprezintă planul traiectoriei satelitului cu masa m, în mişcare faţă de Pămînt considerat fix, a cărui masă este M, sub acţiunea forţei centrale $\vec{F}$.

Sistemul axelor de coordonate rectangulare (x; y), cu originea în centrul Pămîntului, este un sistem fix, iar sistemul axelor de coordonate rectangulare (X; Y), cu originea în acelaşi punct, este un sistem mobil.

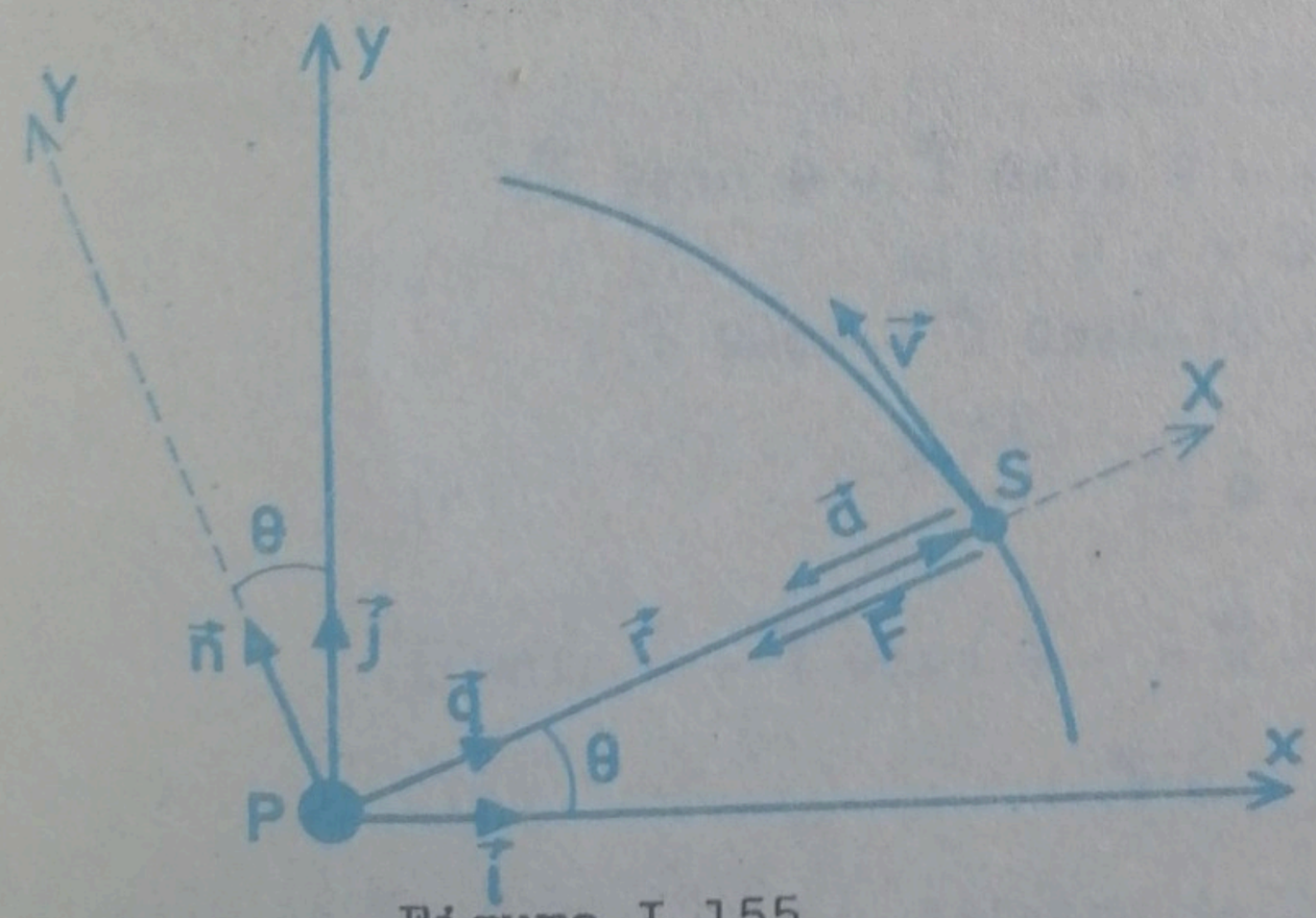


Figura I.155

Notaţii:

$\vec{i}$; $\vec{j}$ = versorii axelor Px; Py;

$\vec{\rho}$; $\vec{n}$ = versorii axelor PX; PY.

In timp ce satelitul S îşi urmează traiectoria mişcării sale în raport cu Pămîntul P, vectorul de poziţie $\vec{r}$ îşi modifică modulul şi orientarea. Elemente variabile sînt deci: r şi θ. Cele două mărimi se numesc coordonate polare plane.

Intre versorii celor două sisteme de axe de coordonate există relaţiile:

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_x + \vec{\rho}_y = \rho_x \vec{i} + \rho_y \vec{j};$$

$$\vec{\rho} = \rho\cos\theta\ \vec{i} + \rho\sin\theta\ \vec{j}; \quad \rho = 1;$$

$$\vec{\rho} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}; \qquad (1)$$

$$\vec{n} = \vec{n}_x + \vec{n}_y + = - n_x \vec{i} + n_y \vec{j};$$

$$\vec{n} = - n \sin\theta\ \vec{i} + n \cos\theta\ \vec{j}; \quad n = 1;$$

$$\vec{n} = - \sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}. \qquad (2)$$

Derivînd relaţiile (1) şi (2) în raport cu t şi considerînd că $\theta = f(t)$, iar $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sînt vectori constanţi, rezultă:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \dot{\vec{\rho}} = - \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{j}; \ \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta};$$

$$\dot{\vec{\rho}} = - \dot{\theta} \sin\theta\ \vec{i} + \dot{\theta} \cos\theta\ \vec{j};$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\theta}(-\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j});$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\theta}\ \vec{n}; \qquad (3)$$

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \dot{\vec{n}} = - \dot{\theta} \cos\theta\ \vec{i} - \dot{\theta} \sin\theta\ \vec{j};$$

$$\dot{\vec{n}} = - \dot{\theta}\ \vec{\rho}. \qquad (4)$$

Vectorul poziţiei satelitului pe traiectorie este:

$$\vec{r} = r\,\vec{\rho}.$$

Rezultă:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{\rho} + r\,\dot{\vec{\rho}};$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{\rho} + r\,\dot{\theta}\,\vec{n};$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{\rho} + r\,\dot{\theta}\,\vec{n}; \qquad (5)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}};$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{\rho} + \dot{r}\,\dot{\vec{\rho}} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{n} + r\,\ddot{\theta}\vec{n} + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{n}};$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{\rho} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{n} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{n} + r\,\ddot{\theta}\,\vec{n} - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{\rho};$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{\rho} + (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\theta)\,\vec{n}. \qquad (6)$$

2) Ecuaţia traiectoriei

Principiul fundamental al dinamicii aplicat mişcării satelitului cu masa m, sub acţiunea forţei centrale $\vec{F}$ exercitată de Pământ asupra sa este:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (7($$

Expresia forţei $\vec{F}$, în funcţie de versorul direcţiei sale este dată de legea atracţiei universale:

$$\vec{F} = -\,k\,\frac{mM}{r^2}\,\vec{\rho}. \qquad (8)$$

Introducînd (6) şi (8) în (7), rezultă:

$$m(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{\rho} + m(2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\vec{n} = -\,k\,\frac{mM}{r^2}\,\vec{\rho};$$

$$m(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = -\,k\,\frac{mM}{r^2};$$

$$\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = -\,kM/r^2; \qquad (9)$$

$$m(2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}) = o;$$

$$2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} = o. \qquad (1o)$$

Inmulţind ecuaţia (1o) cu r, rezultă:

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = o;$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = o;\ r^2\dot{\theta} = C;$$

$$\dot{\theta} = C/r^2; \qquad (11)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt};$$

$$\dot{r} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta}(\frac{C}{r});$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dr}{dt}) = \frac{d}{d\theta}(\frac{dr}{dt})\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}(\frac{dr}{dt});$$

$$\ddot{r} = \frac{C}{r^2}\frac{d}{d\theta}\{-\frac{d}{d\theta}(\frac{C}{r})\} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{r}).$$

Ecuaţia (9) devine:

$$-\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{r}) - r\frac{C^2}{r^4} = -k\frac{M}{r^2};$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = k\frac{M}{C^2}. \qquad (12)$$

Ecuaţia (12) este o ecuaţie diferenţială neomogenă. Pentru integrarea sa considerăm mai întîi ecuaţia omogenă asociată:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = o.$$

Făcînd substituţia: $1/r = z_o$, rezultă:

$$z_o'' + z_o = o;$$

$$z_o = e^{k\theta};\ k^2 + 1 = o;\ k_1 = -i;\ k_2 = +i;$$

$$z_o = C'e^{i\theta} + C''e^{-i\theta};$$

$$z_o = C'(\cos\theta + i\sin\theta) + C''(\cos\theta - i\sin\theta);$$

$$z_o = (C' + C'')\cos\theta + i(C' - C'')\sin\theta;$$

$$z_o = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta;\ C_1 = C' + C'';\ C''=i(C'-C'');$$

$$C_1 = \lambda\cos\theta_o;\ C_2 = \lambda\sin\theta_o;$$

$$z_o = \lambda\cos(\theta - \theta_o). \qquad (13)$$

Relaţia (13) reprezintă soluţia generală a ecuaţiei omogene asociată ecuaţiei neomogene (12).

Din teoria ecuaţiilor diferenţiale se ştie că soluţia generală a ecuaţiei neomogene (12) este egală cu soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate (13), la care se adaugă o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene:

$$\frac{1}{r} = z_o + z_p.$$

Deoarece termenul liber al ecuaţiei neomogene este o constantă, soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este de forma termenului liber, adică:

$$z_p = k\frac{M}{C^2}.$$

Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (12) este:

$$\frac{1}{r} = \lambda\cos(\theta - \theta_o) + k\frac{M}{C^2}; \qquad (14)$$

$$\lambda = \frac{e}{p};\ k\frac{M}{C^2} = \frac{1}{p};$$

$$\frac{1}{r} = \frac{e}{p}\cos(\theta - \theta_o) + \frac{1}{p};$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_o)}.$$

Dacă la momentul $t_o = o$, $\theta_o = o$, rezultă că ecuaţia traiectoriei satelitului, în raport cu Pămîntul este de forma:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}. \qquad (15)$$

Relaţia (15) este ecuaţia unei conice, reprezentînd ecuaţia traiectoriei satelitului în raport cu Pămîntul.

e = excentricitatea conicei;

p = parametrul conicei.

In funcţie de valorile lui e, conica poate fi:

- elipsă ($o < e < 1$);
- parabolă ($e = 1$);
- hiperbolă ($e > 1$);
- cerc ($e = o$).

3) Elementele mişcării pe traiectoria eliptică

In desenul din figura I.156 este prezentată traiectoria eliptică a satelitului S în raport cu Pămîntul P, notaţiile din desen avînd următoarele semnificaţii:

p = periheliul (punctul de pe traiectorie, cel mai apropiat de focar);

$$pP = r_{min} = r_p;$$

A = afeliul (punctul de pe traiectorie, cel mai depărtat de focar);

$$AP = r_{max} = r_A.$$

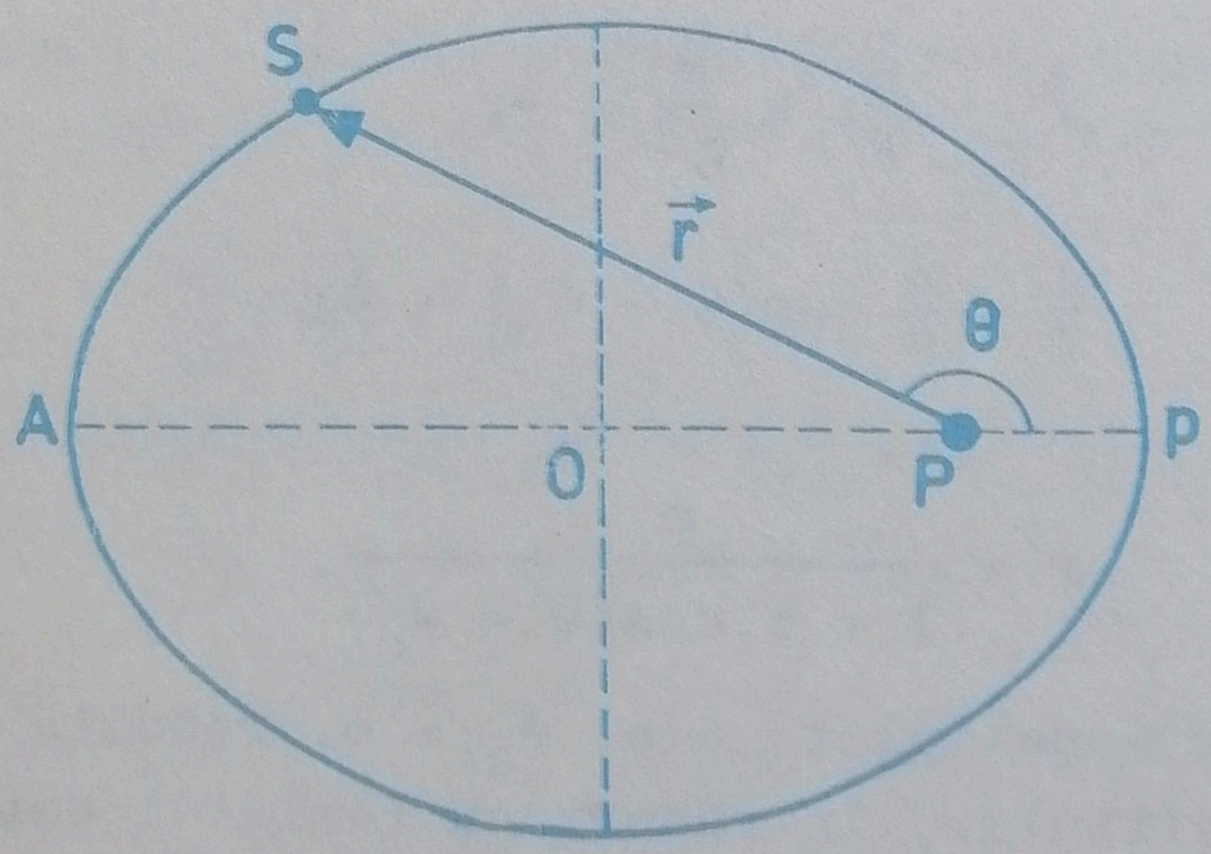


Figura I.156

Excentricitatea şi parametrul elipsei

Ecuaţia elipsei este:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}; \quad o < e < 1. \qquad (1)$$

Pentru $\theta = o$ (satelitul se află la periheliu), rezultă:

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e}. \qquad (2)$$

Pentru $\theta = 18o^{o}$ (satelitul se află la afeliu), rezultă:

$$r_{max} = \frac{p}{1 - e}. \qquad (3)$$

Din (2) şi (3), rezultă:

$$e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}};$$

$$r_{max} + r_{min} = 2a;$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \qquad (4)$$

Din desenul prezentat în figura I.157, rezultă:

$$\sin(18o^{o} - \theta) = b/r = \sin\theta;$$

$$r = b/\sin\theta. \qquad (5)$$

Din (1) şi (5), rezultă:

$$b = \frac{p\ \sin\theta}{1 + e\ \cos\theta}. \qquad (6)$$

$$tg(18o^{o} - \theta) = \frac{b}{a - r_{min}} = - tg\theta;$$

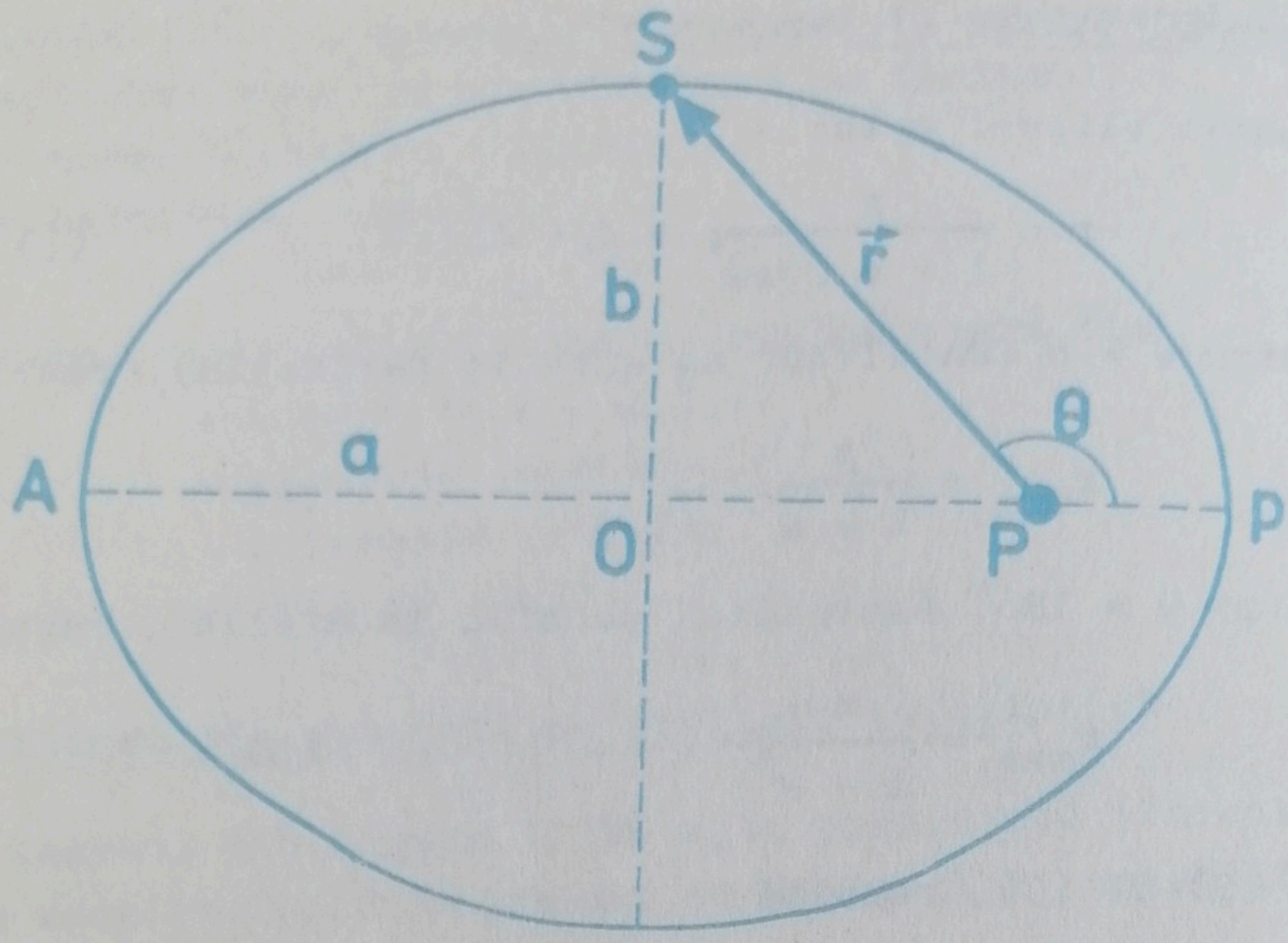


Figura I.157

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{b}{a - r_{min}};$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{b^2}{(a - r_{min})^2}. \qquad (7)$$

Deoarece în desenul din figura I.157 unghiul θ este în cadranul II, din ecuaţia (7), rezultă:

$$\sin\theta = + \frac{b}{\sqrt{b^2 + (a - r_{min})^2}}; \qquad (8)$$

$$\cos\theta = - \frac{a - r_{min}}{\sqrt{b^2 + (a - r_{min})^2}}.$$

Din (2) şi (4) se calculează:

$$a - r_{min} = \frac{pe}{1 - e^2}. \qquad (9)$$

Rezultă:

$$\sin\theta = + \frac{b(1 - e^2)}{\sqrt{b^2(1 - e^2)^2 + p^2e^2}};$$

$$\cos\theta = - \frac{pe}{\sqrt{b^2(1 - e^2)^2 + p^2e^2}}. \qquad (1o)$$

Relaţiile (1o) introduse în relaţia (6), conduc la:

$$b = \frac{pb(1 - e^2)}{\sqrt{b^2(1 - e^2)^2 + p^2e^2} - pe^2};$$

$$b\sqrt{b^2(1 - e^2)^2 + p^2e^2} = pbe^2 + pb(1 - e^2);$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \qquad (11)$$

Din (11) şi (4) rezultă excentricitatea elipsei:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \qquad (12)$$

Din (11) şi (12) rezultă parametrul elipsei:

$$p = b^2/a. \qquad (13)$$

Viteza satelitului la periheliu şi la afeliu

In 2) am demonstrat relaţia:

$$r^2\dot{\theta} = C;\ \dot{\theta} = \omega\ ;\ r\omega = v;\ rv = C.$$

Produsul rv fiind constant, el poate fi scris pentru periheliu. Rezultă:

$$r_p v_p = C;\ v_p = C/r_p.$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{p}{(1 - e)(1 + e)} = \frac{r_{min}}{1 - e} = \frac{r_p}{1 - e};$$

$$r_p = a(1 - e); \qquad (14)$$

$$v_p = \frac{C}{a(1 - e)};$$

$$\frac{1}{p} = k\frac{M}{C^2};\ C = \sqrt{pkM};$$

$$v_p = \frac{\sqrt{pkM}}{a(1 - e)} = kM\frac{\sqrt{p}}{a(1 - e)} = \sqrt{kM}\frac{2^{o}\sqrt{a(1 - e^2)}}{a(1 - e)}$$

$$v_p = \sqrt{kM}\sqrt{\frac{1 + e}{a(1 - e)}}; \qquad (15)$$

$$v_A = C/r_A = C/r_{max};$$

$$r_{max} = a(1 + e);$$

$$v_A = \frac{C}{a(1 + e)} = \frac{\sqrt{pkM}}{a(1 + e)} = \sqrt{kM}\frac{\sqrt{p}}{a(1 + e)};$$

$$p = a(1 - e^2);$$

$$v_A = \sqrt{kM}\sqrt{\frac{1 - e}{a(1 + e)}}. \qquad (16)$$

Comparînd (15) cu (16), rezultă:

$$v_p > v_A.$$

$$v_p = v_{max};\ r_p = r_{min};$$

$$v_A = v_{min};\ r_A = r_{max}.$$

Energia totală a sistemului satelit - Pămînt

$$E = \frac{mv^2}{2} - k\frac{mM}{r}.$$

Legea conservării energiei mecanice ne permite să scriem:

$$E = \frac{mv_p^2}{2} - k\frac{mM}{r_p}; \qquad (17)$$

$$r_p = r_{min}.$$

Introducînd (14) şi (15) în relaţia (17), rezultă:

$$E = -k\frac{mM}{2a}. \qquad (18)$$

Momentul cinetic al satelitului în raport cu Pămîntul

Din teorema variaţiei momentului cinetic rezultă:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (19)$$

Deoarece unghiul dintre $\vec{r}$ şi $\vec{F}$ este 180°, rezultă că variaţia momentului cinetic este nulă şi deci momentul cinetic al satelitului în raport cu Pămîntul este constant:

$\vec{L}$ = constantă vectorială.

Vectorul $\vec{L}$ fiind constant însemnează că atît orientarea sa cît şi modulul său (L) sînt constante.

Valoarea L este aceeaşi indiferent de punctul de pe traiectorie în care se află satelitul. De aceea îl vom calcula scriind expresia sa pentru momentul trecerii satelitului prin periheliu. Rezultă:

$$\vec{L} = \vec{L}_p = \vec{r}_p \times \vec{p}_p = \vec{r}_p \times m\vec{v}_p +;$$

$$L = L_p = mr_pv_p\sin 90^o = mr_pv_p;$$

$$L = m\frac{p}{1+e}\sqrt{kM}\sqrt{\frac{1+e}{a(1-e)}};$$

$$p = b^2/a;$$

$$L = \frac{mb^2}{a(1+e)}\sqrt{kM}\sqrt{\frac{1+e}{a(1-e)}};$$

$$L = mb^2 \sqrt{kM} \sqrt{\frac{1}{a^3(1 - e^2)}};$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}};\ 1 - e^2 = b^2/a^2;$$

$$L = mb \sqrt{\frac{kM}{a}} = \text{constant.} \qquad (20)$$

Viteza areolară a satelitului

In desenul din figura I.158 am reprezentat o porţiune din traiectoria eliptică a satelitului în raport cu Pămîntul.

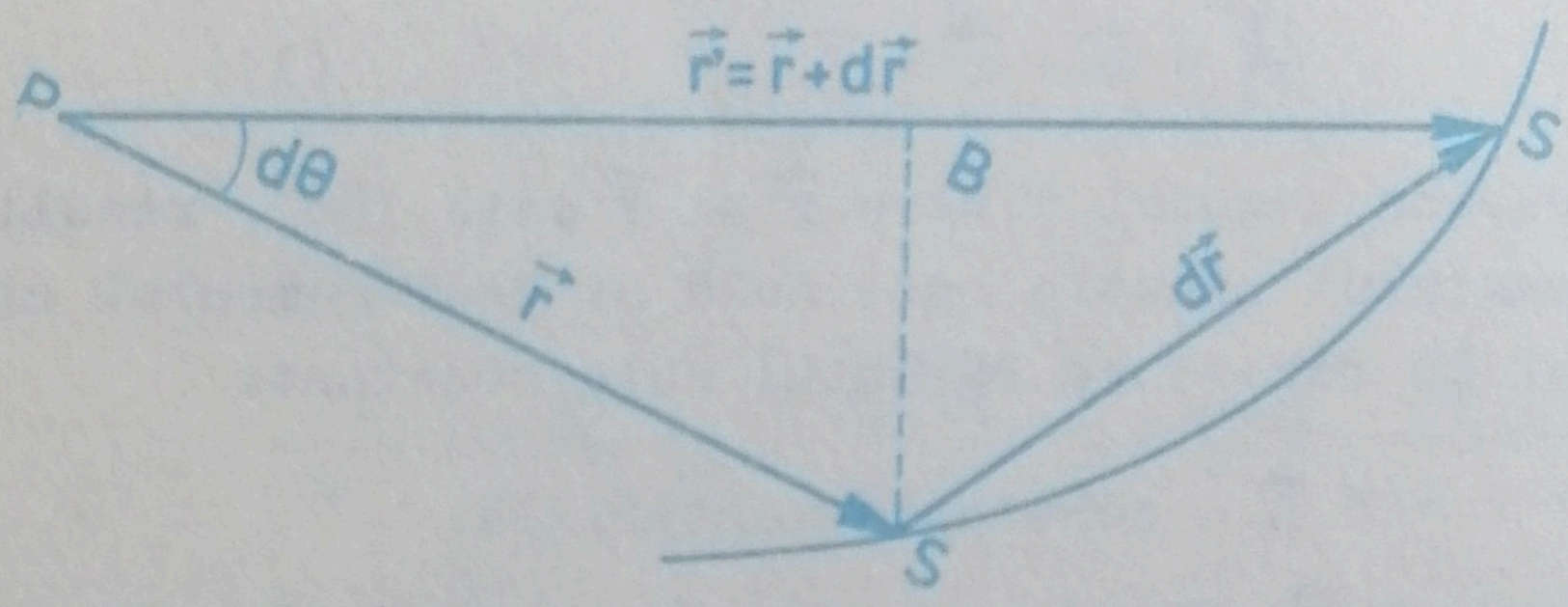


Figura I.158

In poziţia S, la momentul t, vectorul de poziţie al satelitului este $\vec{r}$, iar la momentul $t' = t + dt$, în poziţia S', vectorul de poziţie este $\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$, unde $d\vec{r}$ este vectorul deplasare $\overrightarrow{SS'}$.

In intervalul de timp dt, raza vectoare a descris unghiul la centru $d\theta$.

Aria suprafeţei măturată de vectorul de poziţie în intervalul dt poate fi aproximată cu aria suprafeţei triunghiului PSS':

$$dA = \frac{1}{2} PS' \ BS;$$

$$dA = \frac{1}{2} r' \ r \sin(d\theta). \qquad (21)$$

Deoarece r' şi r sînt modulele a doi vectori ($\vec{r}$ şi $\vec{r}'$) iar $d\theta$ este unghiul dintre aceşti doi vectori, expresia (21) reprezintă modulul unui vector, rezultat din produsul vectorial:

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{r}':$$

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times (\vec{r} + d\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{r} + \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r};$$

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r}. \qquad (22)$$

Vectorul $d\vec{A}$ se numeşte vector suprafaţă orientată. Orientarea acestui vector se determină pe baza regulilor stabilite la produsul vectorial.

Se numeşte viteză areolară mărimea vectorială:

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{A}}{dt}.$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m}\vec{r} \times \vec{p} = \frac{1}{2m}\vec{L};$$

$$\Omega = L/2m.$$

Deoarece $\vec{L}$ este o mărime consta ntă, rezultă că şi viteza areolară a satelitului este o mărime vectorială constantă:

$$\Omega = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{kM}{a}}. \qquad (23)$$

Perioada mişcării satelitului pe orbita eliptică

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{L}/2m; \quad d\vec{A} = \frac{\vec{L}}{2m}\,dt;$$

$$dA = \frac{L}{2m}\,dt. \qquad (24)$$

In timpul unei perioade vectorul de poziţie mătură o suprafaţă a cărei arie reprezintă aria suprafeţei elipsei. Integrînd expresia (24) pe durata unei perioade, rezultă:

$$A = LT/2m, \qquad (25)$$

în care:

A = aria suprafeţei elipsei;

T = perioada mişcării satelitului.

Pentru calculul ariei elipsei considerăm desenul din figura I.159. Aria suprafeţei elipsei este egală cu de patru ori

aria suprafeţei aflată în cadranul I.

Dată fiind ecuaţia elipsei, rezultă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

$$\frac{A}{4} = \int_0^a f(x)dx;$$

$$A = 4\,\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx;$$

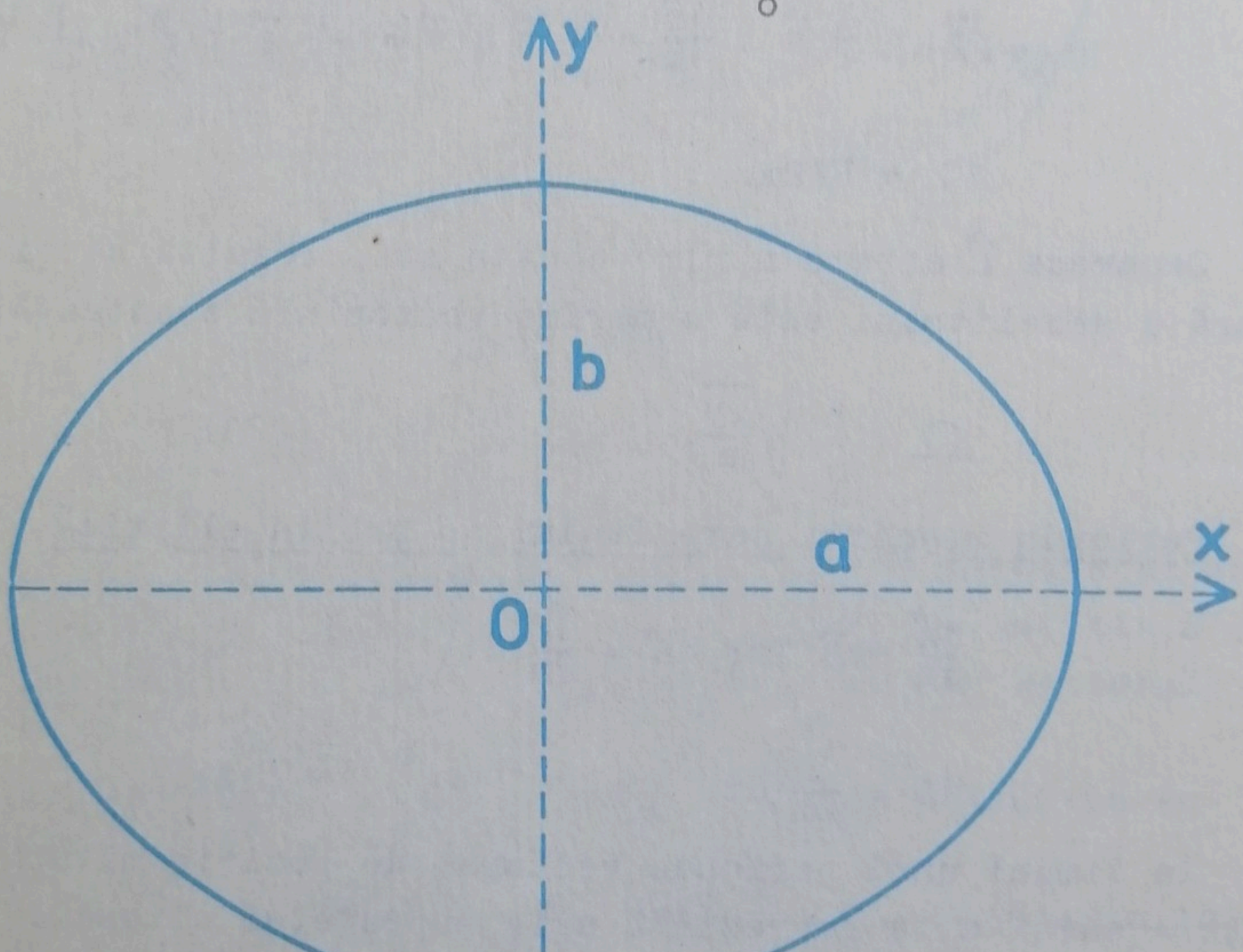


Figura I.159

$x = a\cos t;\ dx = -a\sin t\,dt;$

$x = 0;\ t = \pi/2;$

$x = a;\ t = 0;$

$$A = 4\frac{b}{a}\int_{\pi/2}^{0}\left\{\sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}(-a\sin t)\right\}dt;$$

$$A = -4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt;$$

$\sin^2 t\,dt = \sin t \sin t\,dt;$

$\sin t = u;\ du = \cos t\,dt;$

$dv = \sin t\,dt;\ v = -\cos t;$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du;$$

$$\int \sin^2 t\,dt = -\sin t\cos t + \int \cos^2 t\,dt;$$

$$\int \sin^2 t\,dt = -\sin t\cos t + \int (1 - \sin^2 t)dt;$$

$$\int \sin^2 t\,dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin t\cos t}{2};$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \pi/4;$$

$$A = \pi ab. \qquad (26)$$

Introducînd (2o) şi (26) în (25), rezultă:

$$T = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{kM}}. \qquad (27)$$

Ridicînd la pătrat expresia (27), rezultă:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{kM} a^3. \qquad (28)$$

Pătratul perioadei satelitului este direct proporţional cu cubul semiaxei mari a elipsei (legea a III-a a lui Kepler).

Problema 97

Să se studieze dependenţa elementelor orbitei eliptice a unui satelit de energia sistemului satelit - Pămînt (= constă) şi de momentul cinetic al satelitului.

(Fizica, P.S.S.C.)

Rezolvare

Un satelit terestru se mişcă pe o orbită eliptică avînd Pămîntul situat în unul din focarele elipsei.

Elipsa este locul geometric al punctelor P dintr-un plan, pentru care suma distanţelor de la P la două puncte fixe din acel plan, numite focare (F_1; F_2) este o constantă (2a).

Fiecare elipsă poate fi caracterizată prin această lungime constantă (2a) şi prin distanţa dintre focare (2c). O elipsă poate fi de asemenea descrisă cu ajutorul semiaxei mari (a) şi semiaxei mici (b). Relaţia dintre cele două moduri de descriere este arătată în desenul din figura I.16o.

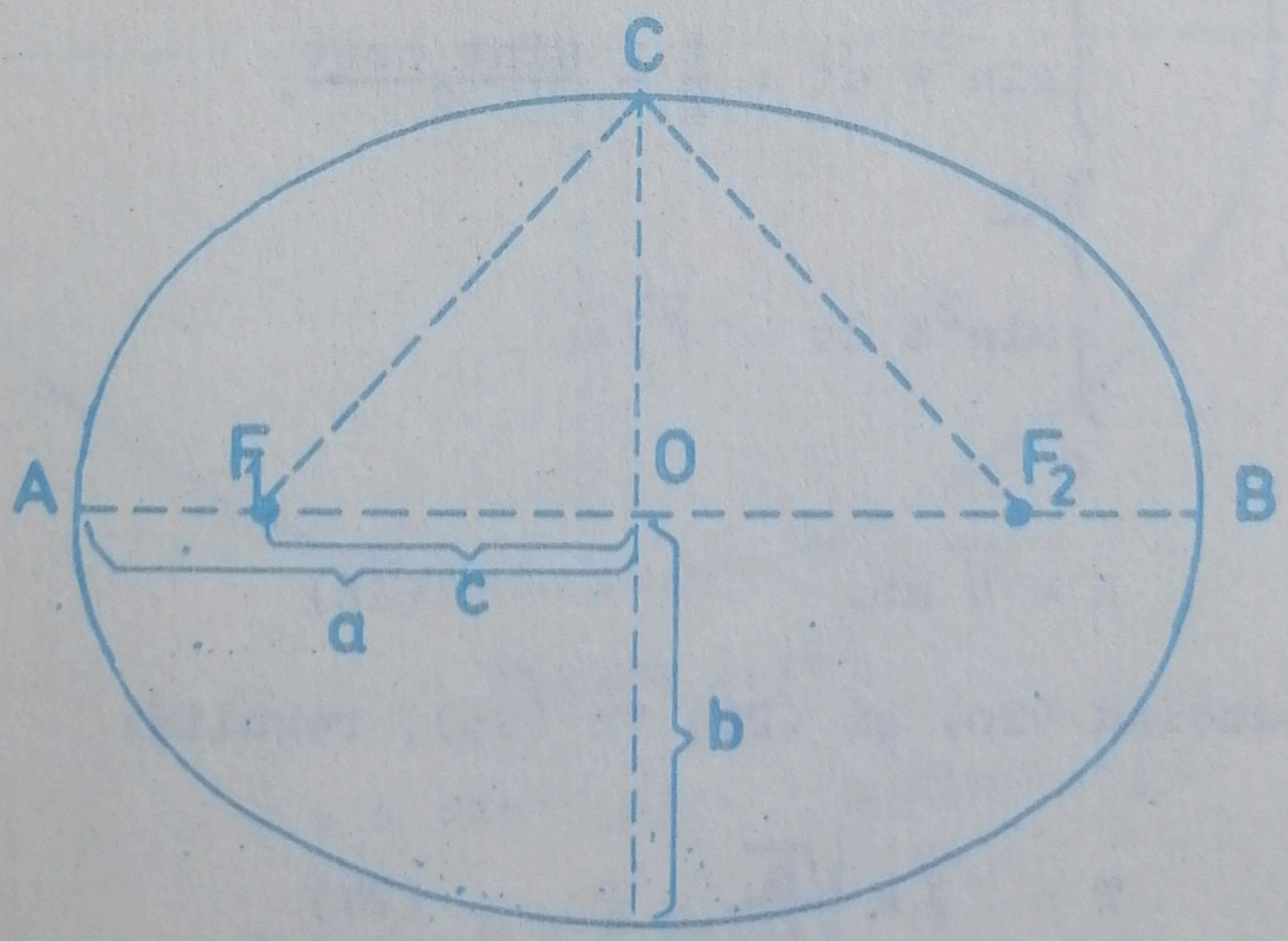


Figura I.16o

Deoarece punctul A se află pe elipsă, rezultă:

$$AF_1 + AF_2 = 2a.$$

Datorită simetriei, $AF_1 = F_2B$, astfel încît AB = 2a şi semiaxa mare este egală cu a.

Deoarece C se află pe elipsă, rezultă:

$$CF_1 + CF_2 = 2a.$$

Datorită simetriei $CF_1 = CF_2$, astfel încît $CF_1 = a$.

Deoarece triunghiul OCF_1 este dreptunghic, rezultă:

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Pentru a stabili dependenţa elementelor elipsei (a; b) de E şi L, vom stabili mai întîi relaţia dintre E şi L.

In acest scop, în desenul din figura I.161 am descompus viteza satelitului $\vec{v}$ în două componente perpendiculare:

$$\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}$$

$$v^2 = v_{//}^2 + v_{\perp}^2 .$$

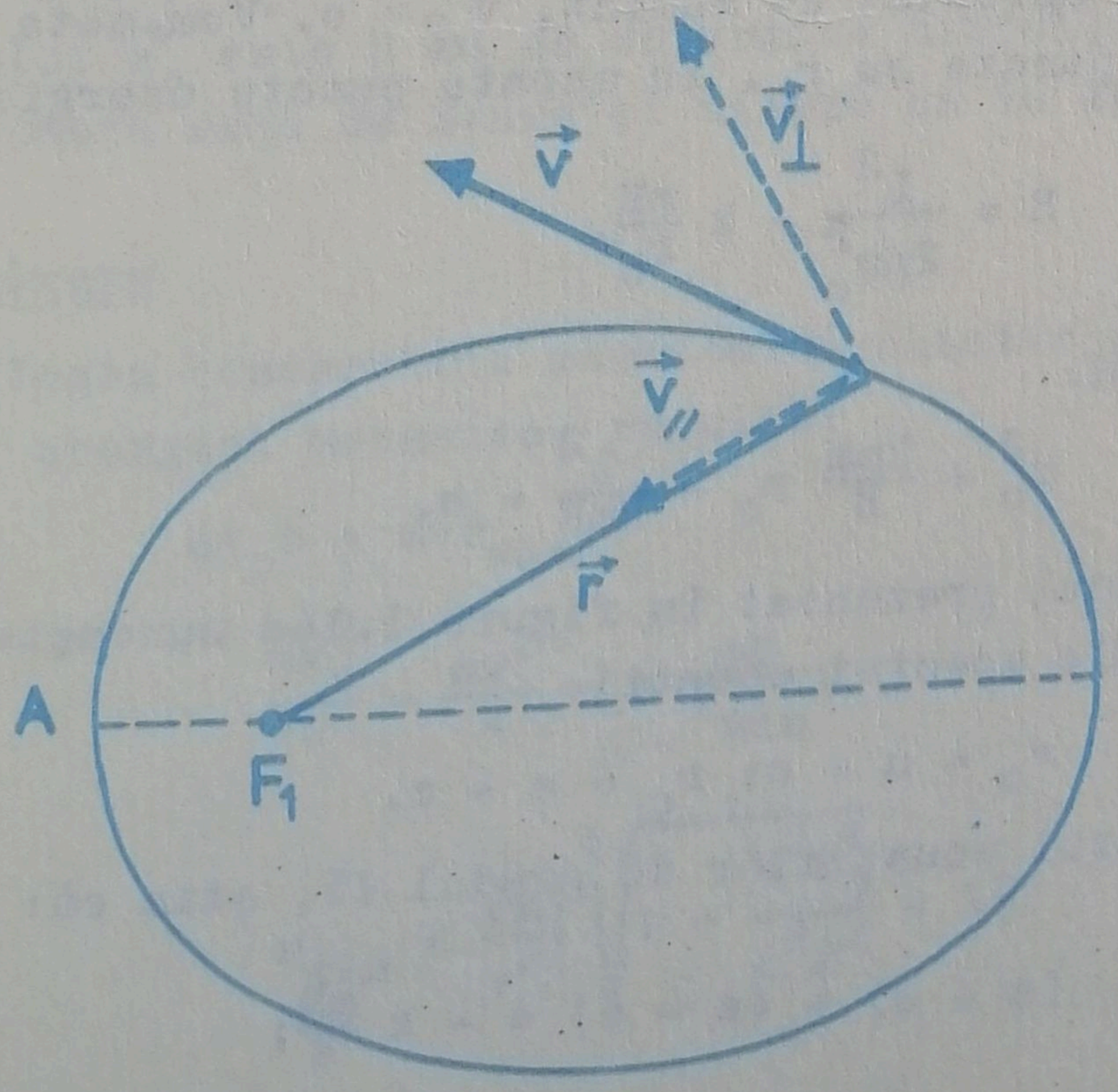


Figura I.161

Pentru energia cinetică, energia totală şi momentul cinetic se pot scrie expresiile:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} mv_{//}^2 + \frac{1}{2} mv_{\perp}^2 ;$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v};$$

$$L = mrv\sin(\vec{r};\vec{v});$$

$$(\vec{r};\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{v};\vec{v}_{\perp});$$

$$L = mrv\cos(\vec{v};\vec{v}_{\perp});$$

$$L = mrv_{\perp};\ v_{\perp} = L/mr;$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{//}^2 + \frac{L^2}{2mr^2};$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_{//}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - k\frac{mM}{r}.$$

Această expresie a energiei totale este valabilă pentru toate punctele de pe orbită. In punctul cel mai depărtat şi în punctul cel mai apropiat de Pământ, $v_{//} = o$. Vom nota distanţele pînă la aceste puncte cu r_o. In aceste puncte energia totală este:

$$E = \frac{L^2}{2mr_o^2} - k\frac{mM}{r_o},$$

din care rezultă:

$$r_o^2 + \frac{kmM}{E} r_o - \frac{L^2}{2mE} = o.$$

Din desenul prezentat în figura I.16o cunoaştem cele două rădăcini ale acestei ecuaţii:

$$r_o = a + c;\ r_o = a - c.$$

Din studiul ecuaţiilor de gradul II, ştim că:

$$(a + c) + (a - c) = - k\frac{mM}{E};$$

$$(a + c)(a - c) = - \frac{L^2}{2mE}.$$

Rezultă:

$$a = -\frac{kmM}{E};\quad b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}};\quad E < o.$$

Concluzii

Semiaxa mare (a) depinde numai de energia totală. Dacă lansăm un satelit, axa mare a orbitei sale eliptice va depinde numai de locul în care el se separă de racheta purtătoare şi de viteza sa în acel moment. Ea nu depinde de direcţia mişcării satelitului.

Semiaxa mică (b) depinde de direcţia mişcării în momentul separării. Deoarece $L = mrv\sin\theta$ şi deoarece pentru o energie fixă semiaxa mică (b) este proporţională cu L, vedem că valoarea maximă a lui b se va obţine atunci cînd $\theta = 90^{o}$, adică atunci cînd $\vec{v} \perp \vec{r}$.

Valoarea maximă pe care o poate avea b, pentru o valoare dată a energiei, este: $b_{max} = a$. Atunci $r_{min} = a$ şi elipsa se reduce la un cerc.

Problema 98

O cometă, aflată foarte departe de Soare, are, în raport cu acesta, viteza v_o. Stiind că distanţa de la Soare la direcţia vectorului $\vec{v}_o$ este b să se determine distanţa minimă la care ajunge cometa faţă de Soare şi viteza sa în acel moment.

Rezolvare

Din legea conservării momentului cinetic şi din legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$mv_o b = mvr_{min};$$

$$\frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - k\frac{mM}{r_{min}};$$

$$r_{min} = \frac{kM}{v_o^2}\left(\sqrt{1 + \frac{b^2 v_o^4}{k^2 M^2}} - 1\right);$$

$$v = v_o b / r_{min}.$$

Problema 99

Asupra unui corp cu masa m aflat pe o pantă cu înclinaţia θ faţă de orizontală acţionează forţă $\vec{F}$, sub acţiunea căreia corpul urcă pe o direcţie oar care, pe pantă. Cunoscînd coeficientul de frecare μ, precum şi unghiurile α şi β care stabilesc orientarea în spaţiu a forţei $\vec{F}$, să se determine acceleraţia corpului şi direcţia mişcării acestuia.

Rezolvare

Dată fiind orientarea în spaţiu a forţei $\vec{F}$, în desenul din figura I.162 sînt prezentate cele trei componente ale sale, în raport cu sistemul x'y'z'.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3;$$

$$F_2 = F \sin\beta \sin\alpha;$$

$$F_1 = F \sin\beta \cos\alpha;$$

$$F_3 = F \cos\beta .$$

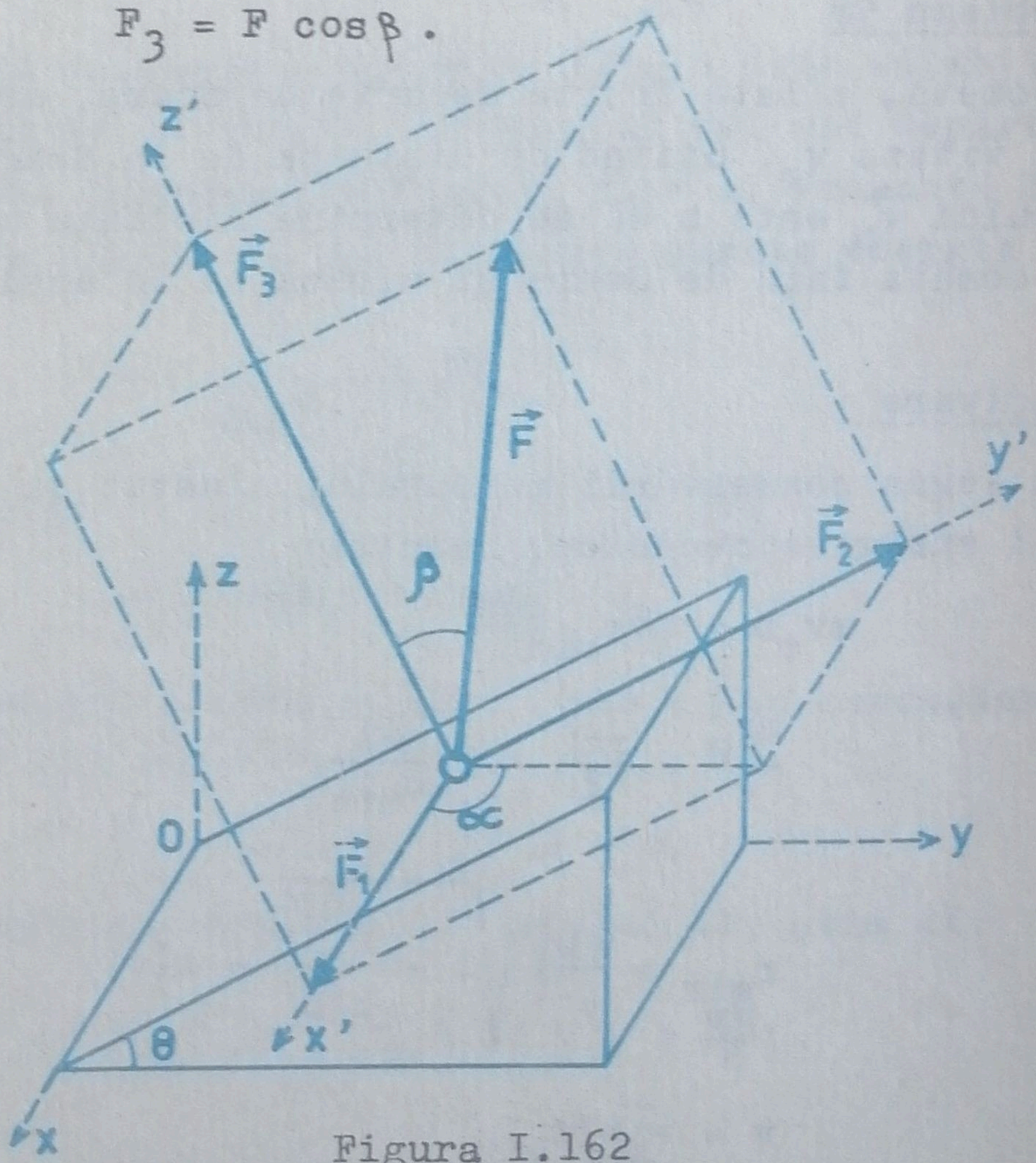


Figura I.162

Forţele care acţionează asupra corpului în planul xoy' (planul mişcării) sînt reprezentate în desenul din figura I.163.

Direcţia mişcării este aceeaşi cu direcţia forţei de frecare, formînd cu direcţia pantei maxime unghiul necunoscut

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G}_t + \vec{F}_f;$$

$$ma = F_1 \sin\gamma + F_2 \cos\gamma - G_t \cos\gamma - F_f;$$

$$0 = F_1 \cos\gamma + G_t \sin\gamma - F_2 \sin\gamma;$$

$$F_f = \mu F_n;\ F_n = G_n - F_3;$$

$$G_n = mg\cos\theta;\ G_t = mg\sin\theta;$$

$$ma = F_1 \sin\gamma + (F_2 - G_t)\cos\gamma - \mu(G_n - F_3);$$

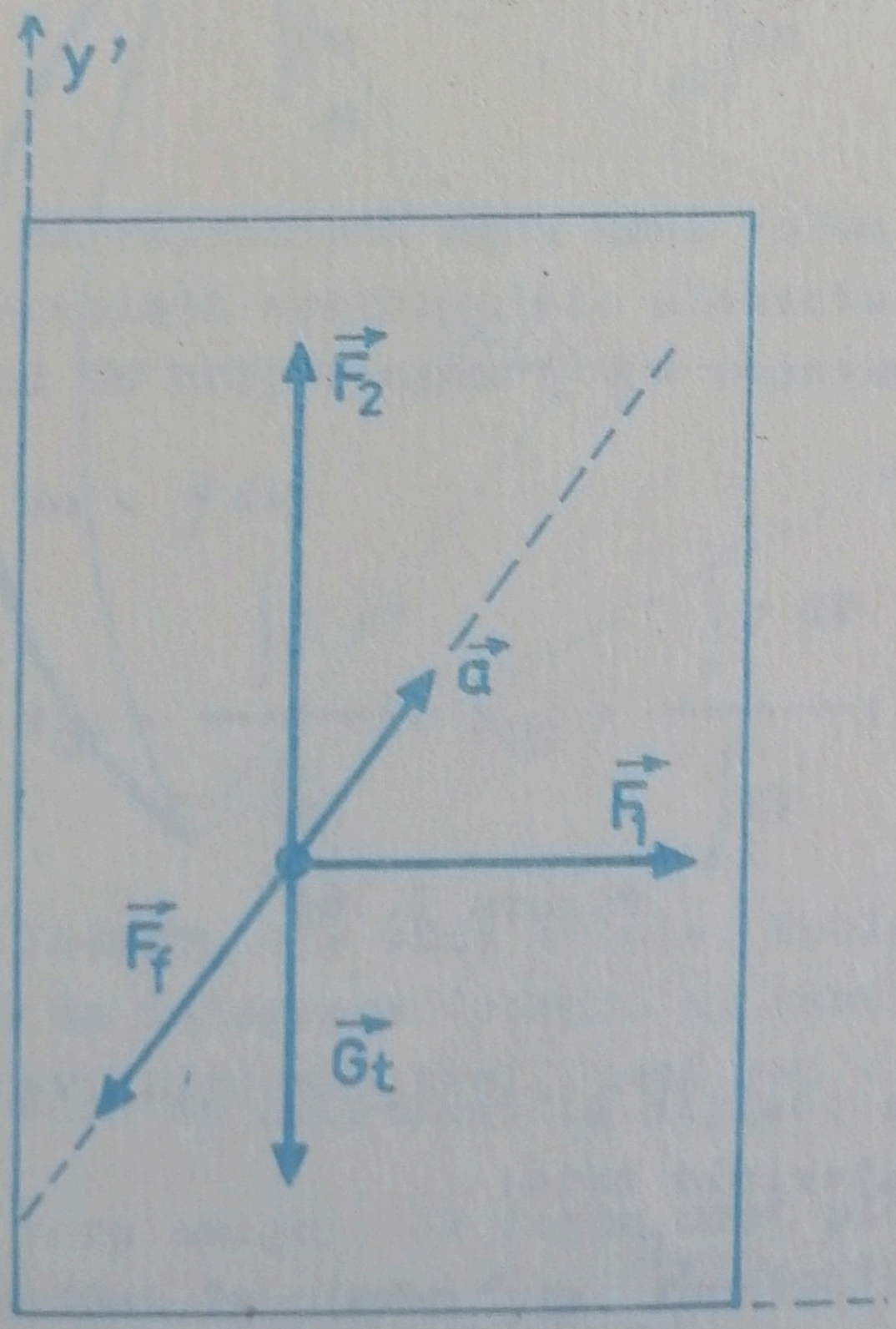


Figura I.163

$$F_1 \cos\gamma = (F_2 - G_t)\sin\gamma;$$

$$a = \frac{\sqrt{F^2 \sin^2\beta \cos^2\alpha + (F\sin\beta \sin\alpha - mg\sin\theta)^2}}{m} -$$

$$- \frac{\mu(mg\cos\theta - F\cos\beta)}{m};$$

$$tg\gamma = \frac{F\sin\beta \cos\alpha}{F\sin\beta \sin\alpha - mg\sin\theta}.$$

Problema 100

Să se determine coordonatele centrului de masă pentru placa plană omogenă, cu grosime uniformă, prezentată în desenul din figura I.164

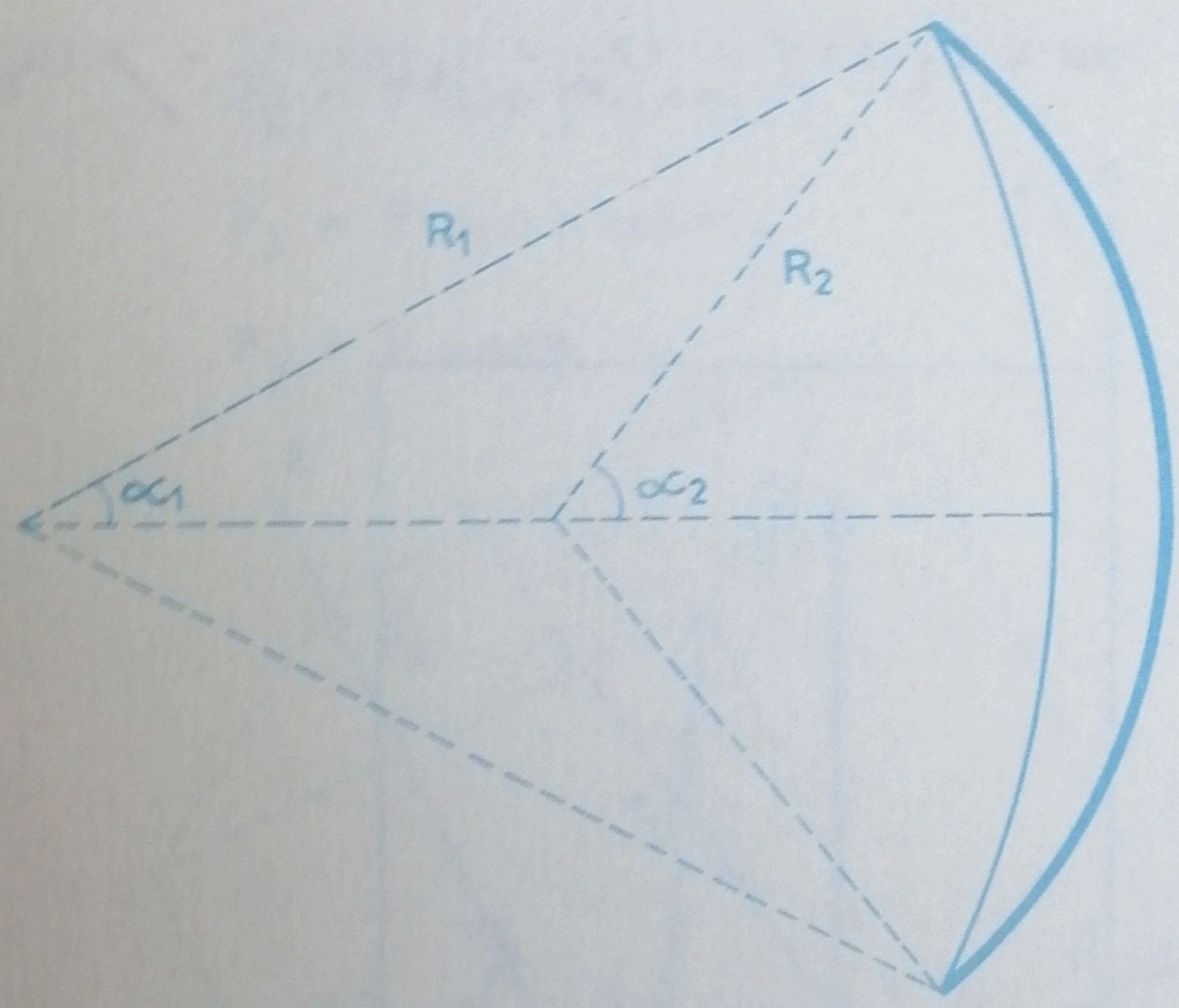


Figura I.164

Rezolvare

Vectorul de poziţie al centrului de masă pentru un sistem de n puncte materiale este:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

iar coordonatele centrului de masă, obţinute din proiecţiile lui $\vec{r}_{CM}$ pe axele unui sistem de referinţă cartezian ales în:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

In cazul unui corp cu structură continuă, considerîndu-l împărţit într-o infinitate de părţi foarte mici (puncte materiale), sumele anterioare se transformă în integrale. Rezultă:

$$x_{CM} = \frac{\int x\, dm}{\int dm}; \quad y_{CM} = \frac{\int y\, dm}{\int dm}; \quad z_{CM} = \frac{\int z\, dm}{\int dm},$$

expresii în care dm reprezintă masa unui volum elementar dV, iar (x, y, z) reprezintă coordonatele elementului de volum dV.

Considerînd un corp omogen (ρ = constant), rezultă:

$$dm = \rho\, dV;$$

$$x_{CM} = \frac{\int x\, dV}{\int dV}; \quad y_{CM} = \frac{\int y\, dV}{\int dV}; \quad z_{CM} = \frac{\int z\, dV}{\int dV},$$

expresii în care integralele sînt triple, duble sau simple, după cum domeniul de integrare (corpul al cărui centru de greutate trebuie determinat) are trei, două sau o singură dimensiune.

Pentru un corp omogen, de forma unei plăci plane cu grosime constantă, situat în planul xoy, prezentînd simetrie în raport cu axa ox, rezultă:

$$dV = h\, dS;$$

dS = aria elementului de suprafaţă;

$$x_{CM} = \frac{\int x\, dS}{\int dS};\quad y_{CM} = o;\quad z_{CM} = \frac{h}{2};$$

h = grosimea plăcii.

Folosind desenul din figura I.165 să determinăm coordonata x_{CM} a centrului de masă (CM) pentru o placă plană avînd forma unui sector circular cu raza R şi unghiul la centru 2α.

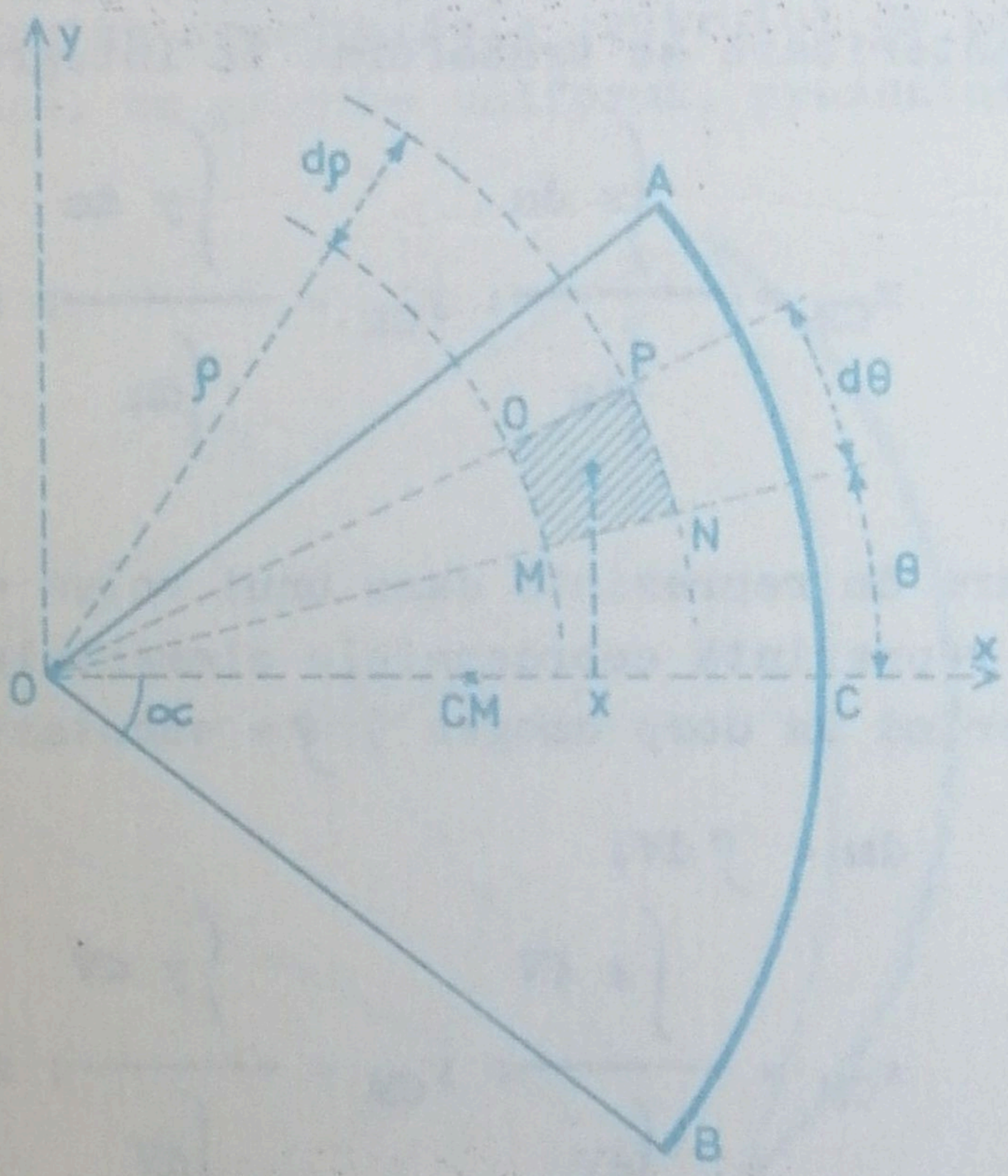


Figura I.165

Elementul de suprafaţă MNPQ poate fi asimilat cu un dreptunghi avînd laturile:

$$MN = d\rho\ ;\ MQ = \rho\, d\theta;$$

Aria elementului de suprafaţă este.

$$dS = MN \cdot MQ;$$

$$dS = \rho\, d\rho\, d\theta.$$

Coordonata x a suprafeţei elementare MNPQ este coordonata centrului de simetrie a dreptunghiului elementar MNPQ.

Rezultă:

$$x = (\rho + \frac{d\rho}{2}) \cos(\theta + \frac{d\theta}{2});$$

$$d\rho << \rho \; ; \; (d\rho \longrightarrow o);$$

$$d\theta << \theta; \; (d\theta \longrightarrow o);$$

$$x = \rho \cos\theta.$$

Coordonata x_{CM} a centrului de masă se calculează astfel:

$$x_{CM} = \frac{\iint \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta}{\iint \rho \, d\rho \, d\theta};$$

$$x_{CM} = \frac{\int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \, d\theta}{\int_0^R \rho \, d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta};$$

$$x_{CM} = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (1)$$

Folosind desenul din figura I.166 să determinăm coordonata $x_{C'M'}$ a centrului de masă (C'M') pentru o placă plană avînd forma unui segment de cerc cu raza R şi unghiul la centru 2α . Am notat în desen segmentul de cerc: ACBDA.

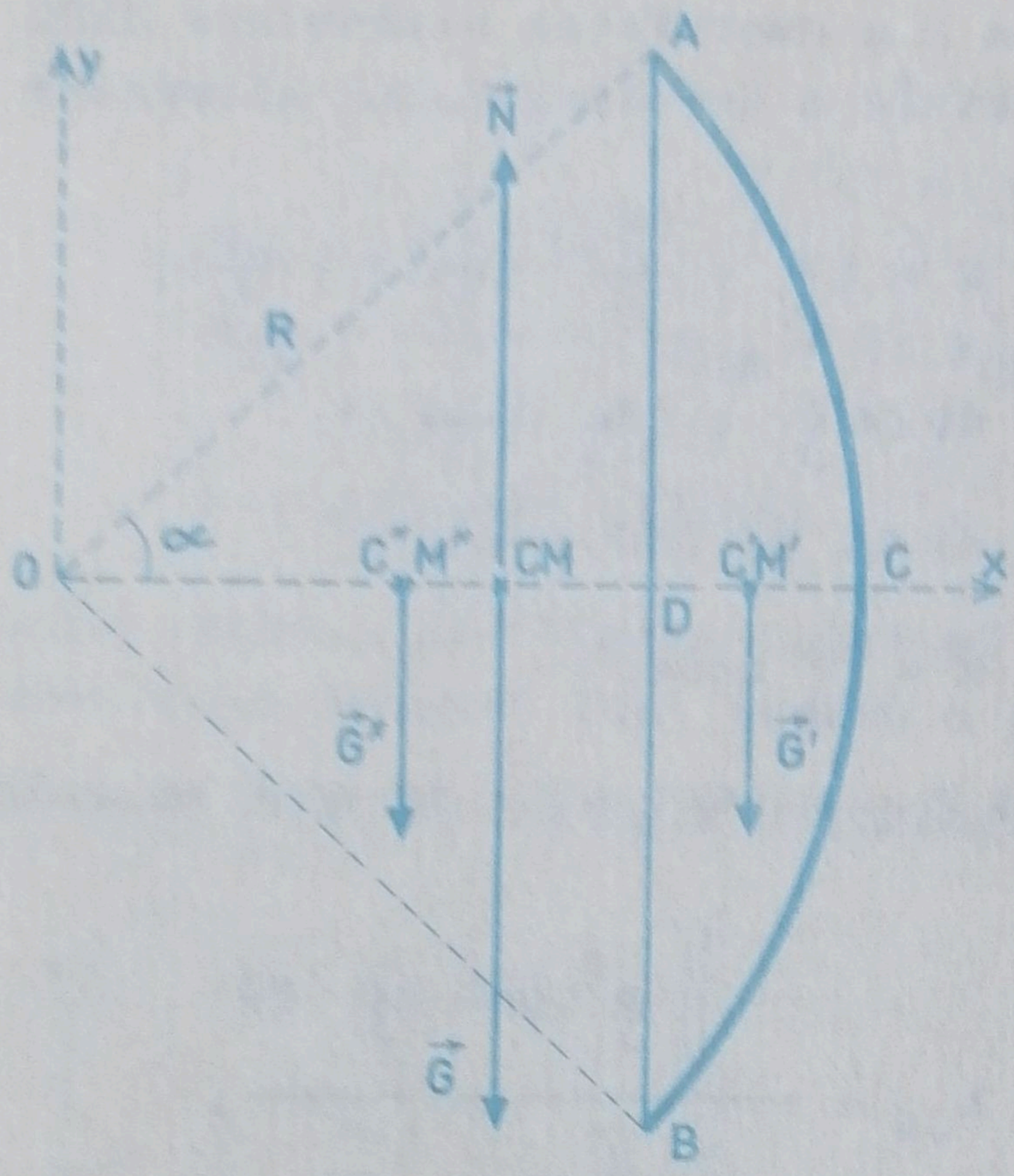


Figura I.166

Pe acelaşi desen a fost notat C"M" centrul de masă al plăcii triunghiulare OAB, pentru care se cunosc:

$$x_{C"M"} = \frac{2}{3} OD;$$

$$x_{C"M"} = \frac{2}{3} R \cos\alpha ; \qquad (2)$$

$$S_{oABo} = R^2 \sin\alpha \cos\alpha . \qquad (3)$$

Se cunosc, de asemenea:

$$S_{OACBO} = R^2\alpha ;$$

$$S_{ACBDA} = R^2(\alpha - \sin\alpha \cos\alpha); \qquad (4)$$

$$G' = G_{ACBDA} = \rho h S_{ACBDA} g;$$

$$G' = \rho hgR^2(\alpha - \sin\alpha \cos\alpha); \qquad (5)$$

$$G'' = G_{OABO} = \wp hgR^2 \sin\alpha\cos\alpha ; \qquad (6)$$

$$G = G_{OACBO} = G' + G''.$$

Echilibrul plăcii OACBO se exprimă scriind ecuaţia momentelor în raport cu CM.

Dacă $\vec{N}$ este reacţia normală a suportului pe care se află în echilibru placa OACBO, rezultă:

$$\vec{N} + \vec{G} = o; \quad \vec{N} + \vec{G}' + \vec{G}'' = o;$$

$$(\vec{M}_{\vec{G}'} + \vec{M}_{\vec{G}''} + \vec{M}_{\vec{N}})_{CM} = o;$$

$$G'(x_{C'M'} - x_{CM}) = G''(x_{CM} - x_{C''M''});$$

$$x_{C'M'} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}. \qquad (7)$$

Folosind desenul din figura I.167 să stabilim coordonata de poziţie x_{CM} a centrului de masă (CM) pentru placa plană omogenă O_1ACBO_1. Pe desen am notat:

C_1 = centrul de masă al plăcii triunghiulare O_1ADBO_1;

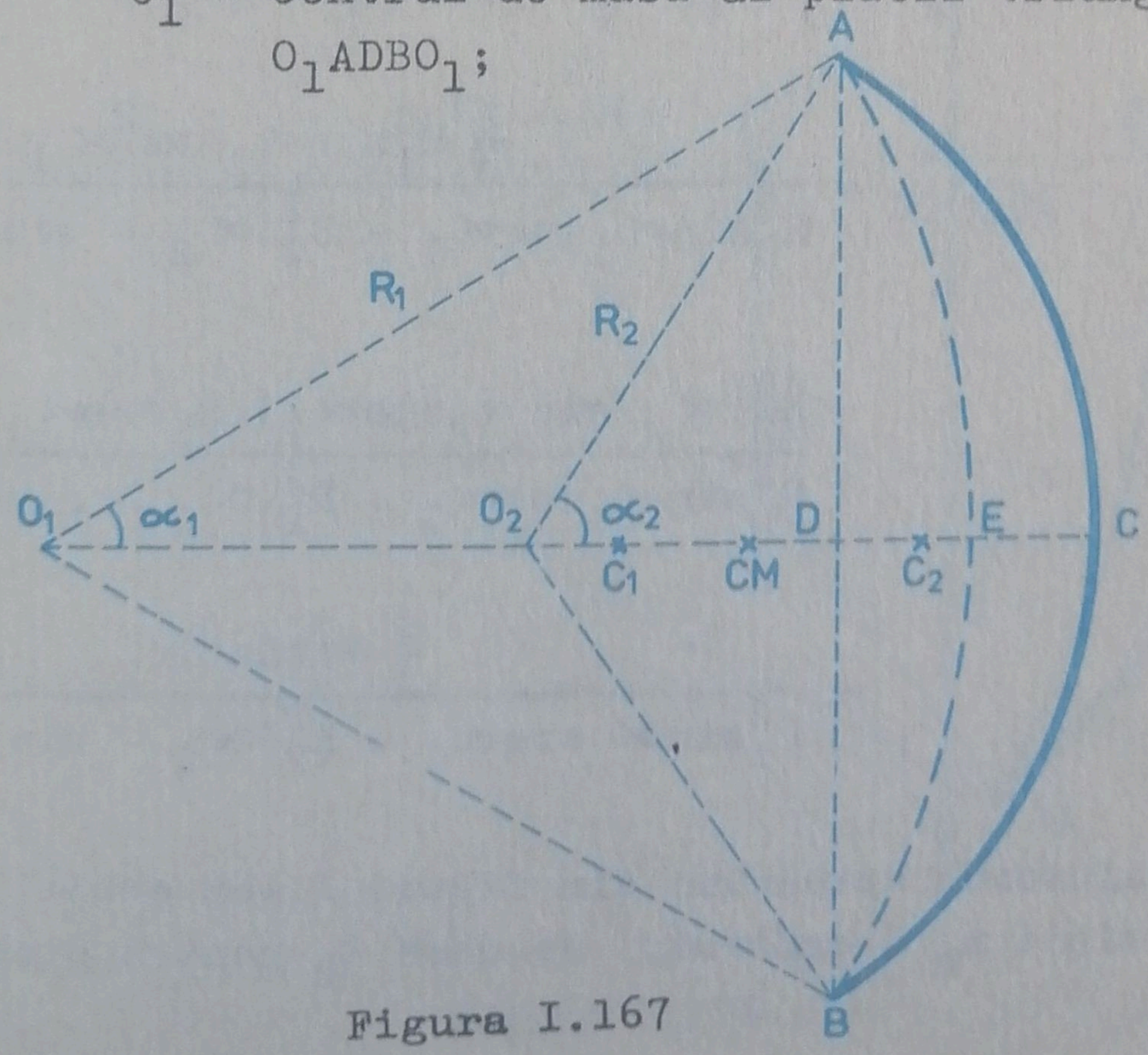


Figura I.167

$$x_{C_1} = x_1 = \frac{2}{3} R_1 \cos\alpha_1;$$

C_2 = centrul de masă al segmentului de cerc ACBDA;

$$x_{C_2} = x_2 = O_1O_2 + C_2O_2;$$

$$x_2 = R_1\cos\alpha_1 - R_2\cos\alpha_2 + \frac{2}{3}\frac{\sin^3\alpha_2}{\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2}$$

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2};$$

$$m_1 = m_{O_1ADBO_1} = h\, S_{O_1ADBO_1};$$

$$m_1 = \rho h R_1^2 \sin\alpha_1\cos\alpha_1;$$

$$m_2 = m_{ACBDA} = \rho h S_{ACBDA};$$

$$m_2 = \rho h R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2);$$

$$x_{CM} = \frac{\frac{2}{3} R_1^3 \sin\alpha_1\cos^2\alpha_1}{R_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2)} +$$

$$+ \frac{R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2)(R_1\cos\alpha_1 - R_2\cos\alpha_2)}{R_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2)} +$$

$$+ \frac{\frac{2}{3} R_2^3 \sin^3\alpha_2}{R_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2)}.$$

Cu ajutorul desenului din figura I.168 stabilim coordonata de poziţie x_o a centrului de masă C_o pentru placa omogenă ACBEA.

Pe desen am notat:

C' = centrul de masă al sectorului de cerc O_1AEBO_1;

$$x_{C'} = x' = \frac{2}{3} R_1 \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1};$$

CM = centrul de masă al plăcii O_1ACBO_1;

C_o = centrul de masă al plăcii ACBEA;

$$x_{C_o} = x_o$$

Din condiţia de echilibru a plăcii O_1ACBO_1 rezultă:

$$G_o(x_o - x_{CM}) = G'(x_{CM} - x');$$

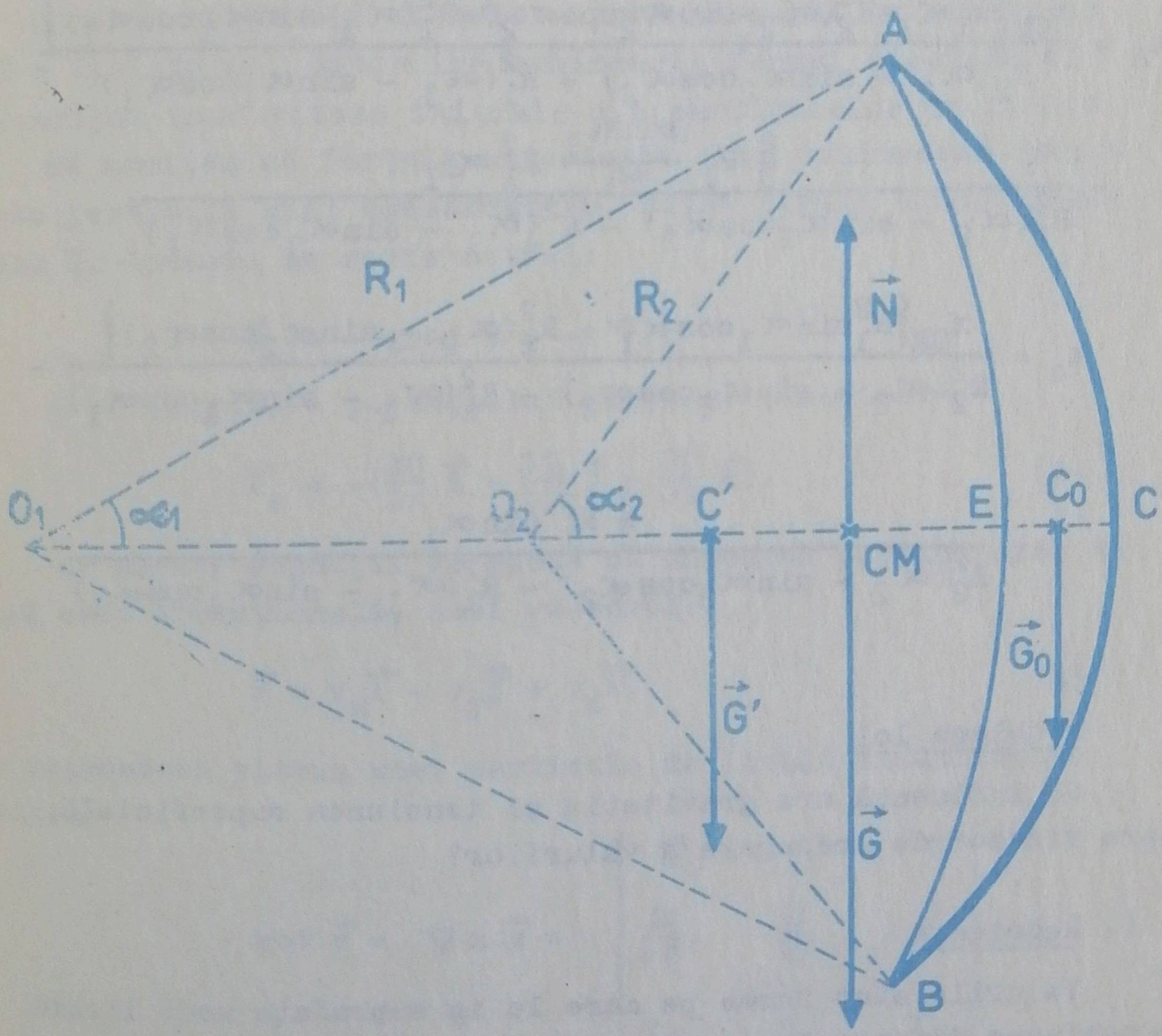


Figura I.168

$$x_o = \frac{x_{CM}(G' + G_o) - x'G'}{G_o};$$

$$G' = ghS_{O_1AEBO_1} = ghR_1^2\alpha_1;$$

$$G_o = \rho ghS_{ACBEA} = \rho gh(S_{ACBDA} - S_{AEBDA});$$

$$G_o = \rho gh\{R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2) -$$

$$- R_1^2(\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_1)\};$$

$$x_o = \frac{x_{CM}\{R_1^2\alpha_1+R_2^2(\alpha_2-\sin\alpha_2\cos\alpha_2)-R_1^2(\alpha_1-\sin\alpha_1\cos\alpha_1)\}}{R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2) - R_1^2(\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_1)}$$

$$- \frac{\frac{2}{3}R_1\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}R_1^2\alpha_1}{R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2) - R^2(\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_1)};$$

$$x_o = \frac{x_{CM}\{R_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2)\}}{R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2) - R_1^2(\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_1)} -$$

$$- \frac{\frac{2}{3}R_1^3\sin\alpha_1}{R_2^2(\alpha_2 - \sin\alpha_2\cos\alpha_2) - R_1^2(\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_1)}.$$

Problema 101

Ce influenţă are gravitaţia şi tensiunea superficială asupra vitezei de propagare a valurilor?

Rezolvare

Valurile sînt forme pe care le ia suprafaţa unui lichid sub acţiunea diferitelor forţe, care imprimă particulelor de lichid mişcări oscilatorii predominant verticale, fără a exista un transport predominant de substanţă pe orizontală.

Valurile sînt provocate în special de vînt, de atracţia Soarelui şi a Lunii, dar şi de mişcarea vapoarelor, de cutremurele de pămînt etc.

Factorii care influenţează caracteristicile valurilor sînt gravitaţia şi tensiunea superficială.

1) Ecuaţia traiectoriei unei particule de lichid

In raport cu un sistem de axe triortogonale (x,y,z), avînd axele ox şi oz în plan orizontal, iar axa oy pe verticală în jos, suprafaţa liberă a unui lichid aflat în echilibru este situată în planul orizontal xoz.

Notăm: $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ versorii celor trei axe de coordonate.

O perturbaţie din exterior, produsă numai pe suprafaţa liberă a lichidului, determină schimbarea formei acesteia şi deci apariţia unor viteze iniţiale ale particulelor de lichid.

Să admitem că forţele exterioare care acţionează asupra acestor particule sînt conservative, adică derivă dintr-un potenţial U. Aceasta se scrie astfel:

$$\vec{F}_e = -\operatorname{grad} U = -\nabla U;$$

$U = U(x,y,z)$ = potenţialul forţelor exterioare;

$$\vec{F}_e = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right). \qquad (1)$$

In aceste condiţii se spune că mişcarea particulelor de lichid este irotaţională, deci vectorul:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \qquad (2)$$

care reprezintă viteza unei particule de lichid îndeplineşte condiţia:

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Dacă mişcarea particulelor este irotaţională, atunci ea

este şi potenţială, adică există o funcţie scalară:

$$\varphi = \varphi(x,y,z,t),$$

numită potenţialul vitezelor, astfel încît:

$$\vec{v} = \text{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}. \qquad (4)$$

Deoarece lichidul este şi incompresibil, rezultă:

$$\text{div}\,\vec{v} = \nabla\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (5)$$

Din (4) şi (5), rezultă:

$$\text{div}(\text{grad}\,\varphi) = \nabla(\nabla\varphi) = \Delta\varphi = 0;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (6)$$

Cunoaşterea funcţiei φ permite calculul componentelor vitezei unei particule de lichid, iar acestea permit calculul ecuaţiei traiectoriei particulei de lichid.

Pentru simplificarea demonstraţiilor să considerăm că mişcarea particulelor se execută numai în planul vertical xoy, astfel că ecuaţia (6) devine:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \qquad (7)$$

iar

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}. \qquad (8)$$

Mişcarea particulelor fiind periodică, funcţia φ trebuie să fie de forma:

$$\varphi = \varphi(x,y,t) = Y(y)\cos(\omega t - kx). \qquad (9)$$

Rezultă:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = Yk\sin(\omega t - kx);$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{dY}{dy}\cos(\omega t - kx);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -Yk^2 \cos(\omega t - kx); \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{d^2 Y}{dy^2} \cos(\omega t - kx). \qquad (11)$$

Introducînd (10) şi (11) în (7), rezultă:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - k^2 Y = 0. \qquad (12)$$

Ecuaţia (12) este o ecuaţie diferenţială omogenă, a cărei soluţie generală este de forma:

$$Y(y) = A\, e^{ky} + B\, e^{-ky}. \qquad (13)$$

Rezultă:

$$\varphi = (A\, e^{ky} + B\, e^{-ky}) \cos(\omega t - kx). \qquad (14)$$

Relaţia dintre constantele A şi B se determină scriind că pentru adîncimea y = H, componenta verticală a vitezei este:

$$(v_y)_{y=H} = 0.$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=H} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (Ake^{ky} - Bke^{-ky}) \cos(\omega t - kx);$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=H} = k(Ae^{kH} - Be^{-kH}) \cos(\omega t - kx) = 0;$$

$$A\, e^{kH} - B\, e^{-kH} = 0;$$

$$A\, e^{kH} = B\, e^{-kH} = \frac{C}{2};$$

$$A = \frac{C}{2} e^{-kH}; \quad B = \frac{C}{2} e^{kH};$$

$$\varphi = \frac{C}{2}\left\{e^{(y-H)k} + e^{-k(y-H)}\right\} \cos(\omega t - kx);$$

$$\varphi = \frac{C}{2}\left\{e^{k(H-y)} + e^{-k(H-y)}\right\}\cos(\omega t - kx);$$

$$\varphi = C\ ch\left\{k(H - y)\right\}\cos(\omega t - kx); \qquad (15)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = kC\ ch\left\{k(H-y)\right\}\ \sin(\omega t - kx);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\ kC\ sh\left\{k(H-y)\right\}\ \cos(\omega t - kx).$$

Particula de lichid avînd o mişcare de oscilaţie în jurul unei poziţii medii, de coordonate x_m şi y_m, putem scrie:

$$\frac{dx}{dt} = kC\ ch\left\{k(H-y_m)\right\}\ \sin(\omega t - kx_m);$$

$$\frac{dy}{dt} = -\ kC\ sh\left\{k(H-y_m)\right\}\ \cos(\omega t - kx_m).$$

Prin integrarea acestor expresii, rezultă:

$$x - x_o = -\frac{k}{\omega}\ C\ ch\left\{k(H-y_m)\right\}\ \cos(\omega t - kx_m); \qquad (16)$$

$$y - y_o = -\frac{k}{\omega}\ C\ sh\left\{k(H-y_m)\right\}\ \sin(\omega t - kx_m); \qquad (17)$$

x_o şi y_o = constante de integrare.

Expresiile (16) şi (17) constituie ecuaţiile parametrice ale traiectoriei particulei de lichid. Eliminînd patametrul t între aceste două expresii, rezultă forma analitică a ecuaţiei traiectoriei particulei de lichid.

$$\frac{(x - x_o)^2}{\left\{\frac{k}{\omega}\ C\ ch\left\{K(H-y_m)\right\}\right\}^2} = \frac{(y - y_o)^2}{\left\{\frac{k}{\omega}\ C\ sh\left\{k(H-y_m)\right\}\right\}^2} = 1. \qquad (18)$$

Traiectoria particulei de lichid dintr-un val este o elipsă avînd semiaxele:

$$a = \frac{kC}{\omega}\ ch\left\{k(H - y_m)\right\};$$

$$b = \frac{kC}{\omega}\ sh\left\{k(H - y_m)\right\}.$$

Planul elipsei descrisă de fiecare particulă din val este planul vertical xoy. Ecuaţia traiectoriei poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1. \qquad (19)$$

Dacă valul se propagă în sensul pozitiv al axei ox, atunci deplasarea particulelor pe traiectoriile eliptice calculate se face în sensul de mişcare al acelor ceasornicului.

La adîncimea $y_m = H$ semiaxa mică a elipsei se anulează, iar elipsa degenerează într-un segment de dreaptă.

Pentru valori mici ale lui y_m, deci în apropierea suprafeţei orizontale iniţiale a lichidului, $H-y_m = H$ şi deci semiaxele elipsei sînt aproximativ egale. In acest caz elipsa degenerează într-un cerc cu raza a, avînd ecuaţia:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = a^2.$$

2) Ecuaţia suprafeţei libere a valului

Intr-un regim de curgere nepermanent al unui fluid, în cazul cînd există un potenţial al vitezelor, iar forţele exercitate din exterior derivă dintr-un potenţial, se poate demonstra existenţa ecuaţiei Bernoulli - Lagrange:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t). \qquad (1)$$

Dacă admitem că mişcarea este lentă, termenul $v^2/2$ este neglijabil în raport cu ceilalţi termeni şi dacă funcţia $f(t)$ şi constanta p/ρ se consideră înglobate în termenul $\partial\varphi/\partial t$, atunci ecuaţia (1) devine:

$$U + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = o. \qquad (2)$$

Am admis că singura forţă exterioară care acţionează asupra particulei de lichid este greutatea, orientarea acesteia fiind pe verticală în jos, adică în sensul pozitiv al axei oy.

Dacă masa particulei de lichid se consideră egală cu unitatea, atunci forţa exterioară care acţionează asupra sa este:

$$\vec{F}_e = g\,\vec{j}; \tag{3}$$

$$\vec{F}_e = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right). \tag{4}$$

Din (3) şi (4) rezultă:

$$g = -\frac{\partial U}{\partial y};$$

$$U = -gy + U_o. \tag{5}$$

Ecuaţia (2) devine:

$$-gy + U_o + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = o.$$

Inglobînd şi constanta de integrare în $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, rezultă:

$$y = \frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{6}$$

Pentru un punct atins de perturbaţie la înălţimea $y = -\eta$ deasupra nivelului static, ecuaţia (6) devine:

$$\eta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{y=-\eta} \tag{7}$$

Deoarece oscilaţiile η sînt mici faţă de adîncimea H a lichidului, se poate scrie:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{y=-\eta} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{y=o} \tag{8}$$

Expresia (7) devine:

$$\eta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{y=o}.$$

Am demonstrat că:

$$\varphi = C\,\mathrm{ch}\{k(H-y)\}\cos(\omega t - kx);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega C\,\mathrm{ch}\{k(H-y)\}\sin(\omega t - kx);$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{y=o} = -\omega C\,\mathrm{ch}(kH)\sin(\omega t - kx).$$

Inlocuind în relaţia (9) rezultă ecuaţia suprafeţei libere a valului, sub forma:

$$\eta = \frac{\omega C}{g} \operatorname{ch}(kH) \sin(\omega t - kx);$$

$$a = \frac{\omega C}{g} \operatorname{ch}(kH);$$

$$\eta = a \sin(\omega t - kx). \qquad (10)$$

3) Viteza de fază a valurilor gravitaţionale (v_f)

Pentru viteza unei particule de lichid am scris:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j};$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j};$$

$$\vec{v} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Dacă oscilaţiile deasupra nivelului static, $y = -\eta$, sînt mici, rezultă:

$$v_y = \frac{d(-\eta)}{dt} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=o}. \qquad (1)$$

Stim că:

$$\eta = a \sin(\omega t - kx) = \frac{\omega C}{g} \operatorname{ch}(kH) \sin(\omega t - kx);$$

$$\varphi = C \operatorname{ch}\{k(H - y)\} \cos(\omega t - kx);$$

$$\frac{d(-\eta)}{dt} = -\frac{\omega^2 C}{g} \operatorname{ch}(kH) \cos(\omega t - kx); \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=o} = -kC \operatorname{sh}(kH) \cos(\omega t - kx). \qquad (3)$$

Introducînd (2) şi (3) în (1), rezultă:

$$\omega = \sqrt{kg \operatorname{th}(kH)}. \qquad (4)$$

Deoarece

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} v_f;\ k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

rezultă următoarea formulă pentru viteza de fază a valurilor gravitaţionale:

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)}. \qquad (5)$$

In oceane lungimea de undă a valurilor poate ajunge la 3oo m, iar viteza de fază poate ajunge 3o m/s.

Dacă lichidul nu este adînc ($H \ll \lambda$) rezultă:

$$\operatorname{th}\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right) = \frac{2\pi H}{\lambda};\ v_f = \sqrt{gH}. \qquad (6)$$

Observaţie: dacă adîncimea lichidului este mică, viteza valurilor gravitaţionale depinde de adîncime.

Dacă lichidul este adînc ($H \gg \lambda$), rezultă:

$$\operatorname{th}\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right) = 1;\ v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \qquad (7)$$

Observaţie: dacă adîncimea lichidului este mare, viteza de fază a valurilor gravitaţionale nu depinde de adîncime.

4) Viteza de grup a valurilor gravitaţionale (v_g)

Să considerăm că pe direcţia axei ox se propagă în acelaşi sens două valuri, avînd aceeaşi amplitudine, iar lungimile de undă şi deci vitezele de fază foarte puţin diferite. In acest caz ecuaţia suprafeţei libere este dată de expresia:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2;$$
$$\eta = a \sin(\omega t - kx) + a \sin(\omega' t - k' x);$$

$$\eta = 2a \cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2} t - \frac{k - k'}{2} x\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t - \frac{k + k'}{2} x\right).$$

Această ecuaţie reprezintă un grup de valuri gravitaţionale sinusoidale, a căror amplitudine:

$$A = 2a \cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2} t - \frac{k - k'}{2} x\right),$$

variază între o şi 2a.

$$\eta = A \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t - \frac{k + k'}{2} x\right). \qquad (1)$$

Lungimea de undă a grupului (λ_g) este distanţa dintre două puncte alăturate, care la acelaşi moment au amplitudinea nulă.

Dacă A=o, înseamnă că:

$$\cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2} t - \frac{k - k'}{2} x\right) = o; \qquad (2)$$

$$\frac{\omega - \omega'}{2} t - \frac{k - k'}{2} x = (2n + 1) \frac{\pi}{2};$$

$$n = o; 1; 2; \ldots\ldots$$

Căutăm primele două valori ale lui x, notate x_1 şi x_2, reprezentînd punctele de pe axa ox, care la momentul t au amplitudines nulă.

$$\frac{\omega - \omega'}{2} t - \frac{k - k'}{2} x_1 = \frac{\pi}{2}; \qquad (3)$$

$$\frac{\omega - \omega'}{2} t - \frac{k - k'}{2} x_2 = 3 \frac{\pi}{2}. \qquad (4)$$

Din (3) şi (4), rezultă:

$$\lambda_g = x_1 - x_2 = \frac{2\pi}{k - k'}. \qquad (5)$$

Perioada grupului (T_g) este intervalul de timp după care amplitudinea aceluiaşi punct de pe axa ox se anulează din nou.

Căutăm primele două valori ale lui t, notate t_1 şi t_2, reprezentînd momentele consecutive pentru care amplitudinea punctului x de pe axa ox are valoarea zero.

$$\frac{\omega - \omega'}{2} t_1 - \frac{k - k'}{2} x = \frac{\pi}{2}; \qquad (6)$$

$$\frac{\omega - \omega'}{2} t_2 - \frac{k - k'}{2} x = 3 \frac{\pi}{2}. \qquad (7)$$

Din (6) şi (7), rezultă:

$$T_g = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega - \omega'}. \qquad (8)$$

Cu ajutorul relaţiilor (5) şi (8) se calculează viteza de grup a valurilor gravitaţionale:

$$v_g = \frac{\lambda_g}{T_g} = \frac{\omega - \omega'}{k - k'} = \frac{d\omega}{dk}. \qquad (9)$$

Deoarece $\omega = kv_f$, rezultă:

$$v_g = \frac{d(kv_f)}{dk} = v_f \frac{dk}{dk} + k \frac{dv_f}{dk};$$

$$v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk}. \qquad (10)$$

Deoarece $k = 2\pi/\lambda$, rezultă:

$$v_g = v_f - \frac{dv_f}{d\lambda}. \qquad (11)$$

Dacă adîncimea lichidului este mică ($H \ll \lambda$) am demonstrat că:

$$v_f = \sqrt{gH}.$$

Introducînd în (11), rezultă:

$$v_g = v_f \qquad (12)$$

Dacă adîncimea lichidului este mare ($H \gg \lambda$), am demonstrat că:

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Introducînd în (11), rezultă:

$$v_g = v_f/2. \qquad (13)$$

5) Influenţa tensiunii superficiale asupra valurilor

Particulele de lichid de la suprafaţa liberă a acestuia se află nu numai sub acţiunea forţelor de greutate, ci şi sub acţiunea forţelor de tensiune superficială. Forţele de tensiune superficială, opunîndu-se deformării suprafeţei libere a lichidului, pot avea o influenţă însemnată asupra vitezei de propagare a valurilor.

Atunci cînd suprafaţa liberă a unui lichid este o suprafaţă curbă, apare o presiune suplimentară, a cărei expresie este dată de legea lui Laplace:

$$p_s = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \qquad (1)$$

în care:

σ = coeficientul de tensiune superficială;

r_1; r_2 = razele de curbură ale suprafeţei libere.

In cazul suprafeţei libere a valurilor, una din razele de curbură este infinit de mare. Rezultă:

$$p_s = \sigma / r. \qquad (2)$$

Ne folosim şi în acest caz de ecuaţia Bernoulli-Lagrange:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t), \qquad (3)$$

în care: $p = p_o + p_s$.

Ecuaţia (3) devine:

$$\frac{p_o}{\rho} + \frac{p_s}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t). \qquad (4)$$

Neglijînd termenul $v^2/2$, iar termenii p_o/ρ şi $f(t)$ considerîndu-i înglobaţi în termenul $\partial \varphi / \partial t$, ecuaţia (4) devine:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p_s}{\rho} + U = o. \qquad (5)$$

Cunoscînd că $U = -gy$ şi folosind (2), ecuaţia (5) devine:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\sigma}{\rho r} - gy = o. \qquad (6)$$

Se demonstrează că:

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad (7)$$

Introducînd (7) în (6), rezultă:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - gy = o. \qquad (8)$$

Pentru un punct situat deasupra nivelului static la înălţimea $y = -\eta$, ecuaţia (8) se scrie:

$$-\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + g\eta + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=-\eta} = 0; \qquad (9)$$

$$\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - g\eta - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=-\eta} = 0. \qquad (10)$$

Dacă oscilaţiile η sînt mici faţă de adîncimea lichidului putem face aproximaţia:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=-\eta} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=0} \qquad (11)$$

Introducînd (11) în (10), rezultă:

$$\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \rho\left\{g + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=0}\right\} = 0. \qquad (12)$$

Stiind că:

$$\varphi(x,y,t) = C\ ch\{k(H - y)\}\ \cos(kx - \omega t),$$

rezultă:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \omega C\ ch\{k(H - y)\}\ \sin(kx - \omega t);$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=0} = \omega C\ ch\{kH\}\ \sin(kx - \omega t). \qquad (13)$$

Introducem (13) în (12). Rezultă:

$$\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \rho g\eta - \rho\omega C\ ch(kH)\ \sin(kx - \omega t) = 0;$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{\rho g}{\sigma}\eta = \frac{\rho\omega C\ ch(kH)}{\sigma}\ \sin(kx - \omega t). \qquad (14)$$

Notaţii:

$$\frac{\rho g}{\sigma} = a^2; \quad \frac{\rho\omega C\ ch(kH)}{\sigma} = b. \qquad (15)$$

Rezultă:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = a^2\eta + b\ \sin(kx - \omega t);$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - a^2 \eta = b \sin(kx - \omega t); \qquad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - a^2 \eta = b \sin(kx) \cos(\omega t) - b \cos(kx) \sin(\omega t);$$

$$M = b \cos(\omega t); \; N = - b \sin(\omega t); \qquad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - a^2 \eta = M \sin(kx) + N \cos(kx). \qquad (18)$$

Ecuaţia (18) este o ecuaţie diferenţială neomogenă. Soluţia sa generală se obţine din soluţia generală a ecuaţiei omogene şi dintr-o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene:

$$\eta = \eta_o + \eta_p. \qquad (19)$$

Ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei (18) este:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - a^2 \eta = o. \qquad (2o)$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene (2o) este de forma:

$$\eta_o = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} \qquad (21)$$

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene o căutăm ca fiind de forma termenului liber al ecuaţiei date, adică:

$$\eta_p = A \sin(kx) + B \cos(kx). \qquad (22)$$

Să scriem că soluţia (22) verifică ecuaţia (18):

$$- Ak^2 \sin(kx) - Bk^2 \cos(kx) - a^2 A \sin(kx) -$$
$$- a^2 B \cos(kx) = M \sin(kx) + N \cos(kx).$$

Prin identificarea coeficienţilor lui sin(kx) şi cos(kx), rezultă:

$$M = - A(a^2 + k^2);$$
$$N = - B(a^2 + k^2); \qquad (23)$$

$$A = -\frac{M}{a^2 + k^2}; \quad B = -\frac{N}{a^2 + k^2}. \qquad (24)$$

Introducînd (24) în (22), rezultă:

$$\eta_p = -\frac{M}{a^2+k^2}\sin(kx) - \frac{N}{a^2+k^2}\cos(kx). \qquad (25)$$

Introducînd (17) în (25), rezultă:

$$\eta_p = -\frac{b\cos(\omega t)}{a^2 + k^2}\sin(kx) + \frac{b\sin(\omega t)}{a^2 + k^2}\cos(kx). \qquad (26)$$

Introducînd (21) şi (26) în (19), rezultă:

$$\eta = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} - \frac{b}{a^2+k^2}\sin(kx-\omega t). \qquad (27)$$

Introducînd (15) în (27) rezultă ecuaţia suprafeţei libere a valului, atunci cînd se are în vedere şi tensiunea superficială a lichidului.

Rezultă:

$$\eta = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{\sigma}}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{\sigma}}\,x} - \frac{\rho\omega C\,\mathrm{ch}(kH)}{\rho g + \sigma k^2}\sin(kx-\omega t). \qquad (28)$$

Pentru componenta v_y a vitezei particulei de lichid, se pot scrie relaţiile:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad (v_y)_{y=-\eta} = \frac{\partial(-\eta)}{\partial t} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=-\eta};$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=-\eta} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=o};$$

$$-\frac{\partial\eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=o}. \qquad (29)$$

Din (28) rezultă:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\rho\omega^2 C\,\mathrm{ch}(kH)}{\rho g + \sigma k^2}\cos(kx - \omega t). \qquad (30)$$

Ştiind că:

$$\varphi = C\ ch\{k(H - y)\}\ cos(kx - \omega t),$$

rezultă:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - kC\ sh\{k(H - y)\}\ cos(kx - \omega t);$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=o} = - kC\ sh(kH)\ cos(kx - \omega t). \qquad (31)$$

Introducînd (3o) şi (31) în (29), rezultă:

$$\frac{\rho \omega^2 ch(kH)}{\rho g + \sigma k^2} = k\ sh(kH);$$

$$\frac{\rho k \omega^2}{k^2(\rho g + \sigma k^2)} = th(kH);$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = v_f^2 = \frac{\rho g + \sigma k^2}{\rho k}\ th(kH);$$

$$v_f^2 = \left(\frac{g}{k} + \sigma\ \frac{k}{\rho}\right)\ th(kH). \qquad (32)$$

Deoarece $k = 2\pi/\lambda$, rezultă:

$$v_f = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \sigma\ \frac{2\pi}{\lambda\rho}\right)\ th\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)}. \qquad (33)$$

Dacă lichidul este adînc ($H \gg \lambda$), rezultă:

$$th\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right) = 1;$$

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \sigma\ \frac{2\pi}{\lambda\rho}}. \qquad (34)$$

Cînd lungimea de undă a valului este mare, expresia (34) devine:

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \qquad (35)$$

reprezentînd viteza de fază a valurilor gravitaţionale.

Deci influenţa tensiunii superficiale asupra vitezei de propagare a valurilor cu lungime de undă mare este neglijabilă.

Cînd lungimea de undă a valurilor este mică, expresia (34) devine:

$$v_f = \sqrt{\sigma \frac{2\pi}{\lambda \rho}}, \qquad (36)$$

reprezentînd viteza de fază a valurilor de tensiune superficială.

Pentru calculul vitezei de grup a valurilor de tensiune superficială, folosim relaţia pe care am dedus-o anterior:

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}. \qquad (37)$$

Introducînd (36) în (37) rezultă pentru viteza de grup a valurilor de tensiune superficială următoarea expresie:

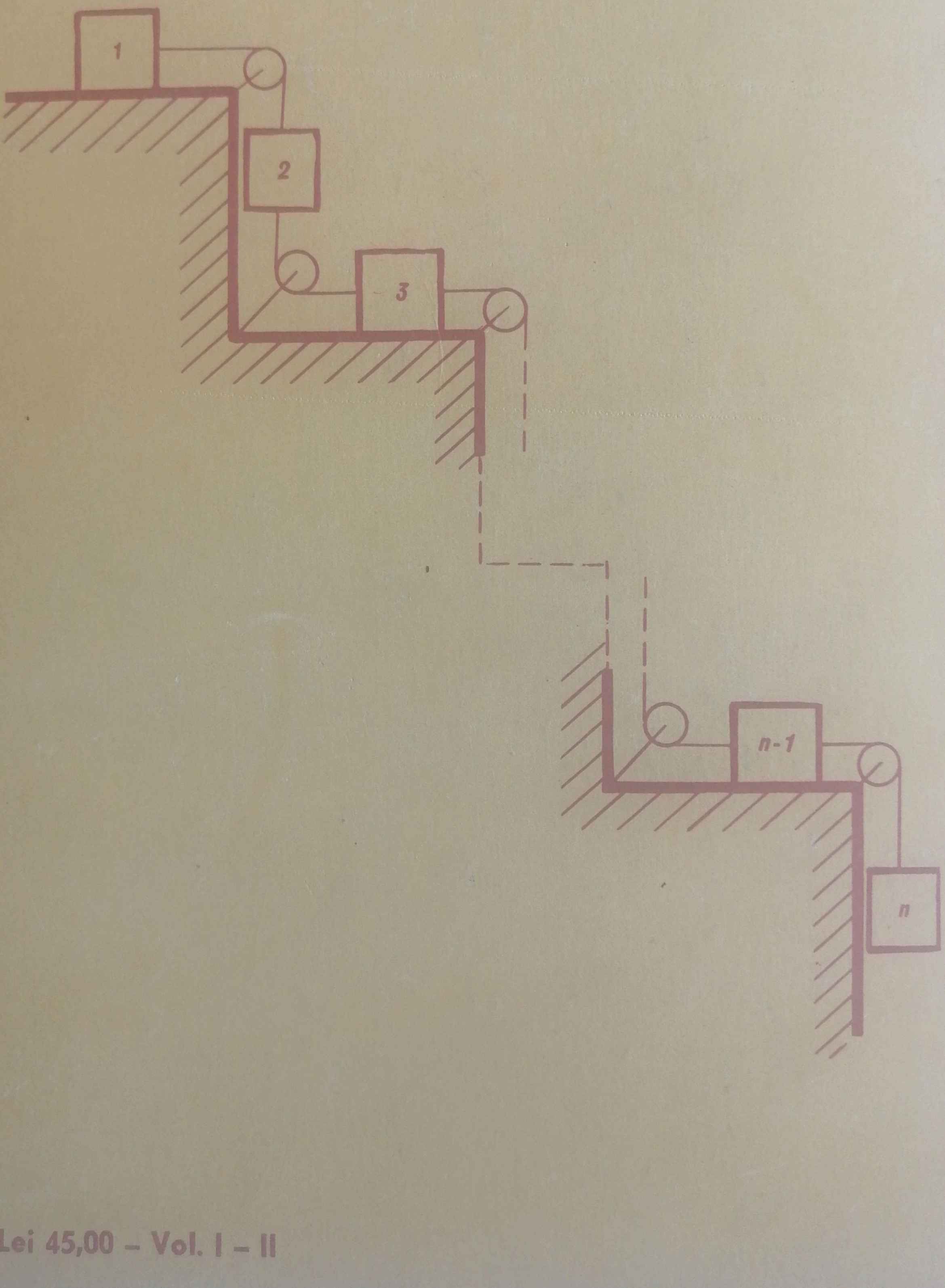
$$v_g = \frac{3}{2} v_f. \qquad (38)$$

In acest caz viteza grupului de valuri este mai mare decît viteza valului izolat, adică invers decît la valurile gravitaţionale.

Dacă un corp solid se mişcă plutind pe suprafaţa unui lichid, producînd valuri, atunci valurile de tensiune superficială sosesc înaintea corpului, iar valurile gravitaţionale sosesc în urma acestuia.

Tehnoredactor MIHAIL SANDU
Dactilografierea textului MIHAIL SANDU
Desenator IVAN DANILOV

Tiparul executat sub c-da nr. 69
la Întreprinderea Poligrafică Galați
B-dul George Coșbuc nr. 223 A
Republica Socialistă România



Lei 45,00 – Vol. I – II